

كتاب

التحفة البريئة في النسخة الشريفة  
جزء أول

I

رقم ٤٩

المكان رافضيه وفلانيه



# كتاب

التحفة البهية في الاصول الهندسية

تأليف

حضرة احمد بك عظيم

ناظر مدرسة دار العلوم وقلم الترجمة

---

المجلد الاول

وهو مقرر تلامذة السنة الاولى التجهيزية

---

قررت تطارة المعارف العمومية تدريس هذا الكتاب لتلامذة مدرسة التجهيزية

(حقوق الطبع محفوظة لتطارة المعارف)

---

(الطبعة الثالثة)

بالمطبعة الكبرى الاميرية ببولاق مصر المحمية

سنة ١٨٩٢

افرنجيه



## بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله بعد نظام الكائنات على محور الاستقامة والنبات والصلاة والسلام على  
نبينا قطب دائرة الكرة الكونية وعلى آله وأصحابه المتشككين بأشكال أعماله السنية  
(وبعد) فلما كانت مدرسة التجهيزية في احتياج الى كتاب في الاصول الهندسية  
على حسب البروجرام اعتنيت بجمعه فناء بحمد الله على وفق المرام وجزأته الى أربعة  
أجزاء كل جزء منها لسنة من سنها المكتبية وسميته (التحفة البهية في الاصول الهندسية)  
ثم عنى لي أن أزيده فوائد وأوشحه بطرف فرائد تحتاج اليها الفرقة التحضيرية من مدرسة  
المهندسخانة الخديوية فميزتها بصورتها قبل السطور ويسده تعالى التوفيق وتسهل الامور  
أسأله أن يعم نفعه وأن يحسن في النفوس وقعه في ظل من حسن التفاته للعازف  
وأسدى لرعاياه كل تليد وطارف من هو بالناء حقيق أفندينا (محمد باشا توفيق)

احمد نظم  
ناظر مدرسة دار العلوم  
وقلم الترجمة

متع الله بأشباه الفخام وأنجباله الكرام

# الجزء الاول

من كتاب التحفة البهية في الاصول الهندسية

(وهو مقرر تلامذة السنة الاولى التجهيزية)

في الاشكال المستقيمة الاضلاع ومحيط الدائرة

## الباب الاول

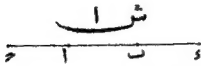
(في الاشكال المستقيمة الاضلاع)

### الفصل الاول

(في المبادئ)

- (١) حجم الجسم عبارة عن المحل الذي يشغله من الفراغ  
مهما كان صغرا الجسم فانه لا بد أن يكون له امتداد في كل جهة من جهاته  
ولا يعتبر عادة الا في ثلاث جهات أصلية يعبر عنها بالابعاد وتسمى بالطول والعرض والارتفاع  
غير أن الارتفاع يسمى عمقا أو سمكا على حسب مقتضيات الاحوال
- (٢) وأوجه الجسم المحددة له تسمى بالسطوح فالسطح اذن ليس الا غلافا نصوريا مجردا  
عن السمك أى لا يكون له غير بعدين فقط وهما الطول والعرض
- (٣) وتقاطع السطوح يحدث عنه ما يسمى بالخطوط فالخطوط اذن مجردة عن السمك والعرض  
وليس لها سوى الطول
- (٤) وتقاطع الخطين يحدث عنه ما يسمى بالنقطة فالنقطة لا امتداد لها  
يطلق اسم الشكل على وجه العموم على كل من الاجسام والسطوح والخطوط  
يقال للشكلين انهما متساويان متى أمكن انطباق أجزاءهما على بعضها انطباق تاما
- (٥) الغرض من علم الهندسة دراسة خواص الاشكال

(٦) الخط المستقيم هو أقصر بعد بين نقطتين مثل المستقيم أ ب (شكل ١)  
ويمكن تصوره تولده من تحرك نقطة بحيث تقبض دائماً  
نحو نقطة أخرى ثابتة ومعينة



ويستدل من ذلك

أولاً - أنه هو عبارة عن مقدار مقياس البعد المحصور بين النقطتين أ و ب  
ثانياً - أنه يمكن تصوره امتداده الى ما لا نهاية من جهتي النقطتين أ و ب نحو النقطتين  
ح و د مثلاً والمجموع لا يتكون منه الامتداد واحد وبناء عليه يمكن تعيين اتجاه  
أي مستقيم بعد معرفة نقطتين منه  
ثالثاً - ان المستقيمين لا يمكن أن يشتركا في نقطتين أو في جزء من مستقيم الا اذا اتحدا في جميع  
امتدادهما

رابعا - أنه لا يمكن أن يديين النقطتين أ و ب الامتداد واحد  
(٧) والخط المنكسر هو ما تركب من جملة أجزاء من خط مستقيم ليست على استقامة واحدة  
مثل الخط أ ب ح د (شكل ٢)



(٨) والخط المنحني ما ليس مستقيماً ولا مركباً من خطوط  
مستقيمة مثل الخط أ ب (شكل ٣)



ويمكن تصوره تولده هذا الخط من تحرك نقطة بحيث تغير  
اتجاهها في كل لحظة بدرجات غير محسوسة تابعة قانوناً ما  
وينتج من هذا التعريف أنه يمكن أن يمد بين النقطتين  
أ و ب خطوط منحنية لانهاية لعددها واذن فالخطوط ثلاثة مستقيمة ومنكسرة ومنحنية  
(٩) السطح المستوي أو المستوي فقط هو السطح الذي ينطبق عليه المستقيم كمال الانطباق  
في جميع جهاته

وحيث قد علم مما تقدم أنه لا يوجد الانواع واحد من المستقيم فيعلم ضرورة  
أولاً - عدم تعدد نوع المستوي

ثانياً - أنه يمكن تصوره امتداد المستوي في كل جهة من جهاته امتداداً غير نهائي والمجموع  
لا يتكون منه الامتداد واحد

ثالثاً - ان المستقيم يمكن أن يمر به مستويات لانهاية لعددها

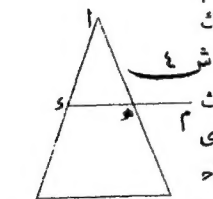
رابعا - ان كل مستقيم اشترك مع المستوي في نقطتين انطبق عليه في جميع امتداده

- (١٠) ولنذكر هذه القوائد الاتية
- النظرية - هي قضية تؤل بواسطة البرهان الى البديهيات
- الفائدة - هي نظرية معدة لتحضير برهان نظرية أخرى أهم منها
- النتيجة - هي الثرة المستخرجة من نظرية أو جله نظريات
- العملية - هي المسألة التي يراد حلها وجوابها يسمى حلا
- العكس - هو قضية يكون فرضها نتيجة قضية أخرى ونتيجتها افراض تلك القضية
- التبنييه - هو اشارة الى مفهوم يؤخذ من قضية أو جله قضايا تقدمت

### نظريية

- (١١) كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يترجمها مستو واحد لا اثنان
- لتكن ا ، ب ، ج النقاط الثلاث ( شكل ٤ )

الاول - يترجم المستقيم ا ب مستو زمرله بحرف ج ثم يتصور دورانه حول هذا المستقيم حتى يصل الى النقطة ج وبذلك يتعين وضعه



- الثاني - اذا فرض امكان امر ار مستو آخر ج بالنقط الثلاث المذكورة وكانت م احدى نقطه فنصل بين م و س احدى نقط المستقيم ا ب بمستقيم م د بحيث يكون قاطعا للمستقيم ا ب فنحيث ان المستقيم م د الموجود في مستوى ج ما يقطعي ج فيكون موجودا فيه بتمامه ( ج رابعا )

وينتج من ذلك

- أولا - ان كل مستقيمين متقاطعين يتعين بهما مستو
- ثانيا - ان كل مستقيم ونقطة خارجة عنه يتعين بهما مستو
- ثالثا - انه يمكن لا تمايق مستو على آخر أو جزأى مستويين على بعضهما اشتراكهما في ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

## الفصل الثاني

(في الزوايا)

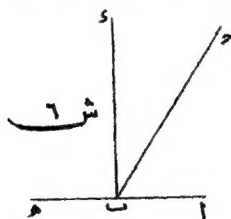
### تعريف

(١٢) اذا تقاطع المستقيمان  $AB$  و  $AC$  في نقطة  $A$  (شكل ٥) فان جزءا من المستوى  $ABC$  أي الانفرجاق الواقع بينهما يسمى زاوية ويسمى المستقيمان المذكوران المحددان لها ضلعي الزاوية وتسمى نقطة تلاقيهما  $A$  برأس الزاوية



تقرأ الزاوية تارة بحرف الرأس وحده اذا كانت منفردة وبجروف ثلاثة بشرط أن يكون حرف الرأس في الوسط اذا اشتركت في الرأس مع زوايا أخرى

لا يرتبط مقدار أي زاوية بطول ضلعيها بل بالانفرجاق الواقع بينهما وعلى ذلك فالزاويتان المتساويتان هما اللتان ينطبق انفرجاقهما على بعضهما بدون نظر الى تفاوت طول الاضلاع كل زاويتين مثل  $ABC$  و  $DEF$  اشتركتا في ضلع واحد واتحدتا في الرأس يقال لهما متجاورتان كما في (شكل ٦)



يمكن ضم زاويتين أو أكثر الى بعضهما أو طرح زاوية من أخرى فالزاوية  $ABC = DEF + GHI$  والزاوية  $DEF = ABC - GHI$  (شكل ٦)

(١٣) أنواع الزاوية ثلاثة قائمة وحادة ومنفرجة

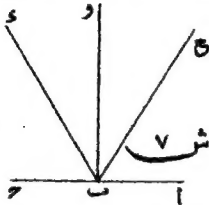
فالزاوية القائمة هي إحدى الزاويتين المتجاورتين المتساويتين الحادتين من تلاقى مستقيمين بأختر مثل زاوية  $ABC$  وزاوية  $DEF$  (شكل ٦) والزاوية الحادة هي ما كانت أصغر من القائمة مثل  $ABC$  و  $DEF$  والزاوية المنفرجة هي ما كانت أكبر من الزاوية القائمة مثل زاوية  $DEF$

(١٤) المستقيم المنصف لزاوية هو مستقيم يترأسها ويقسم الانفرجاق الواقع بين ضلعيها الى قسمين متساويين مثل المستقيم  $BC$  المنصف لزاوية  $ABC$  (شكل ٦)



## نظرية

(١٥) كل نقطة مفروضة على مستقيم لا يمكن أن يمد منها المستقيم واحد يصنع معه زاويتين متجاورتين قائمتين (شكل ٧)



يدل ذلك من نقطة ب المستقيم ب ج فيصنع مع المستقيم ا ح زاويتين متجاورتين ا ب ح و ج د فان كانتا متساويتين كان هو المستقيم المطلوب (١٣) والاي تصور نقل الزاوية الصغرى ا ب ح جهة الشمال في الوضع د ح بحيث تكون زاوية ا ب ح = زاوية د ح

ثم يتصور مبد من نقطة ب المستقيم ب و منصف الزاوية ج د فيكون هو المستقيم المطلوب وذلك لان زاوية ا ب ح = د ح وزاوية ج د و = د ب بالتصنيف وبجمع هاتين المتساويتين على بعضهما طرفا على طرف يحدث

$$ا ب ح + ج د و = د ح + د ب و \text{ أو } ا ب و = د ح و$$

وحيث انهما متجاورتان وحادثتان من تلاق مستقيم باخر فتكون كل منهما قائمة (١٣)

ثم ان كل مستقيم يفرض خلاف ب و مثل ب د لابد وان يصنع مع المستقيم ا ح زاويتين متجاورتين مختلفتين أي غير قائمتين لان

$$(١) \text{ زاوية د ح د } = د ح و - د ب و$$

$$(٢) \text{ زاوية د ب ا } = د ب و + ا و د$$

وينتج من ذلك

أولا - ان الزوايا القائمة كلها متساوية

ثانيا - ان مجموع الزاويتين الحادتين من تلاق مستقيم باخر يساوي زاويتين قائمتين لانه لوجع المتساويتان (١) و (٢) السابقان يحدث

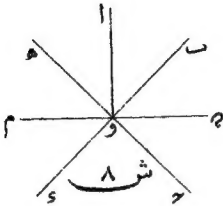
$$د ح د + د ب ا = د ح و + ا و د = ٩٠$$

فاذا كانت احدهما قائمة تكون الاخرى كذلك

تنبيه - الزاويتان د ح و د ب ا يقال لهما متكاملتان والزاويتان د ح و د ب و يقال لهما متمماتان

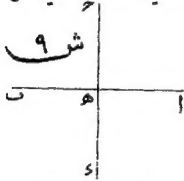
ثالثا - ان مجموع الزوايا المجتمعة حول نقطة واحدة يساوى أربع زوايا قوائم أعني أن

$$\text{هـ د ا} + \text{ا ب د} + \text{ب ح د} + \text{ح د هـ} = \text{هـ ز} \quad (\text{شكل ٨})$$



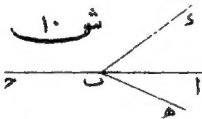
لانه لو مد من نقطة و المستقيم م د لكات جميع هذه الزوايا بعضها فوق هذا المستقيم والبعض الآخر تحته وحيث ان مجموع الزوايا التي فوقه يساوى قائمتين وكذلك التي تحته فيكون مجموع الكل مساويا لاربعة قوائم

رابعا - اذا أحدث مستقيم تقاطعه مع آخر زاويتين متجاورتين قائمتين كان هذا الاخير مكتوبا أيضا مع الاول زاويتين متجاورتين قائمتين (شكل ٩) أعني اذا صنع المستقيم ح د بتقاطعه مع المستقيم ا ب الزاويتين ا هـ ح و ح هـ ب المتجاورتين القائمتين كان الزاويتان ا هـ د و ا هـ ب المتجاورتان الحادتان من تقاطع المستقيم ا ب بالمستقيم ح د قائمتين أيضا وهو أمر ظاهر لانه حيث كانت احدى المتجاورتين ا هـ د قائمة فتكون الاخرى كذلك (ثانيا)



### نظرية

(١٦) اذا كان مجموع أى زاويتين متجاورتين مساويا لقائمتين كان ضلعاهما المتطرفان على استقامة واحدة (شكل ١٠)

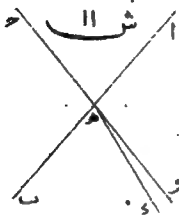


أعني اذا كان ا ب د + د ح د = ح د يكون المستقيم ا ب على استقامة ح د وذلك لانه لو فرض خلاف ما ذكر وأن مستقيما آخر مثل ب هـ هو الذى على استقامة ح د

فانه يحصل بمقتضى ما تقدم (١٥ ثانيا) أن هـ د + د ب ح = ح د وبمقارنة هذه المتساوية بالمتساوية المفروضة يعلم ان زاوية هـ د = ا ب د وهو محال وحينئذ فلا بد أن يكون ب هـ منطبقا على ا

## نظرية

(١٧) اذا تقاطع مستقيمان فكل زاويتين متقابلتين بالرأس تكونان متساويتين (شكل ١١)



فالزاويتان  $ا هـ$  و  $د هـ$  متساويتان لان كل واحدة منهما تكمل زاوية واحدة  $ا هـ$  وكذا الزاويتان  $ا هـ$  و  $ج هـ$  متساويتان لان كل واحدة منهما مكمل لزاوية واحدة  $ا هـ$

عكس هذه النظرية حقيقي أى اذا وجدنا في جهتي المستقيم  $ا ب$  ان الزاويتين  $ا هـ$  و  $د هـ$  المتقابلتين بالرأس متساويتان يكون المستقيم  $د هـ$  على استقامة  $د هـ$

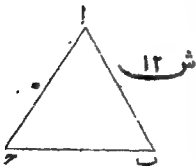
لانه لو لم يكن كذلك لكان  $هـ و$  مثلاً على استقامة  $ج هـ$  وحيفئذ يجب أن تكون زاوية  $و هـ =$  زاوية  $د هـ$  وهذا لا يتأتى الا اذا كان  $و هـ$  منطبقاً على  $د هـ$

## الفصل الثالث

(في المثلثات)

(١٨) المثلث هو جزء المستوي المحدود بثلاثة مستقيمات متقاطعة متنى (شكل ١٢)

يتركب المثلث من ستة أشياء وهي ثلاث زوايا وثلاثة أضلاع فالزوايا هي  $ا$  و  $ب$  و  $ج$  ورؤوسها هي رؤس المثلث والأضلاع هي  $ا ب$  و  $ب ج$  و  $ا ج$  ويرمز لها عادة بالرموز  $أ$  و  $ب$  و  $ج$  لبيان انها مقابلة للزوايا  $ا$  و  $ب$  و  $ج$



اذا تساوت الأضلاع الثلاثة من المثلث قيل له متساوى الأضلاع وان تساوى فيه ضلعان فقط سمي مثلثاً متساوى الساقين ويسمى الضلع الثالث قاعدة

وان اختلفت أضلاعه قيل له مثلث مختلف الأضلاع واذا وجدت فيه زاوية قائمة قيل له مثلث قائم الزاوية وسمي الضلع المقابل للقائمة وتر

## نظرية

(١٩) أى ضلع من أى مثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وأكبر من فاضلهما (شكل ١٣) أعنى أن



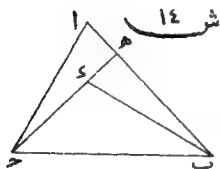
$2 > 1 + 3$  و  $2 < 1 - 3$   $1$  ثابت ذلك يقال حيث كان  $2$  مستقيماً ماراً بين النقطتين  $1$  و  $3$  فهو أصغر من كل خط منكسر مار بين النقطتين المذكورتين وبذلك يثبت

أن  $2 > 1 + 3$  و  $2 < 1 - 3$  وبمثله يكون  $1 > 2 + 3$  و  $1 < 2 - 3$  ثم يقال حيث كان  $1 > 2 + 3$  فإذا طرأنا  $1$  من طرفي هذه المتباينة يحدث  $1 - 2 > 3$  أو  $2 < 1 - 3$  وهو المراد

## نظرية

(٢٠) إذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصل منها إلى نهايتي أحد أضلاعه بمستقيمين كان مجموع الضلعين الواصلين أصغر من مجموع الضلعين المحيطين بهما (شكل ١٤) أعنى أن

$$2 > 1 + 3$$



وذلك لأنه لو مده  $2$  على استقامته جهة  $3$  حتى يلاقى المستقيم  $1$  في نقطة  $هـ$  لحدث بمقتضى النظرية السابقة أن

$$2 > 1 + 3 \text{ أو } 2 > 1 + 3$$

وكذلك يحدث من المثلث  $2$   $هـ$  أن (١٩)

$$2 > 1 + 3$$

فإذا ضامنا  $1$  المتباينتين على بعضهما طرأ على طرف  $1$  أعنى جمع الطرف الاكبر على الطرف الاكبر والطرف الاصغر على الطرف الاكبر كان ضرورة مجموع الطرفين الاولين أكبر من مجموع الطرفين الآخرين ويحدث

$$2 > 1 + 3 \text{ أو } 2 > 1 + 3$$

وبطرح هـ من طرفي المتباينة يحدث

$$د + د > د + د + ا + هـ + هـ \text{ أو}$$

$$د + د > د + د + هـ + ا + ا \text{ أو}$$

$$د + د > د + ا + ا \text{ وهو المطلوب}$$

نتبه - من المعلوم أن هذه النظرية تكون حقيقية أيضاً لو أخذت نقطة د على أحد أضلاع المثلث

### نظرية

(٢١) في كل مثلث متساوي الساقين الزاويتان المقابلتان لساقيه تكونان متساويتين

(شكل ١٥) إذا كان  $ا = ب$  تكون

زاوية ب = زاوية د وللبرهنة على ذلك

نضع بجانب المثلث ا ب د عين المثلث

مقلوباً في الوضع أ ب د ثم نطبق الشكل

أ ب د على الشكل ا ب د بحيث نضع

الزاويتين أ و ا المتساويتين على بعضهما

فتقع ضرورة نقطة د على ب ونقطة د على د على مقتضى الفرض وحينئذ ينطبق

د ب د على د (٦ رابعاً) وينطبق الشكلان على بعضهما وتكون زاوية د = د

وحيث كانت د = ب فتكون زاوية ب = د وهو المطلوب

نتيجة - ينتج من ذلك أن المثلث المتساوي الأضلاع يكون متساوي الزوايا

### نظرية

(٢٢) وبالعكس إذا تساوت زاويتان من مثلث متساوي الأضلاع المقابلان لهما ويكون المثلث

متساوي الساقين (شكل ١٥) فإذا كانت زاوية ب = زاوية د يبرهن على أن الضلع

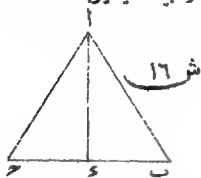
$$ا = ب$$

لذلك نضع بجانب المثلث ا ب د عين المثلث مقلوباً في الوضع أ ب د ثم نضع الشكل الثاني

على الأول بأن يطبق الضلع  $\hat{c}$  على مساويه  $b$  و  $a$  وحيث أن زاوية  $\hat{c} = \hat{a} = \hat{b}$  زاوية  $b$  يأخذ الضلع  $\hat{c}$  الاتجاه  $a$  وبعين هذا السبب يأخذ الضلع  $b$  الاتجاه  $a$  واذن تنطبق نقطة  $\hat{a}$  على نقطة  $a$  وينطبق الشكلان على بعضهما انطباقاً تاماً ويكون  $\hat{a} = \hat{b}$  وحيث أن  $\hat{a} = \hat{b}$  هو عين  $a$  فيكون  $a = b$  وهو المطلوب  
نتيجة - ينتج من ذلك أن المثلث المتساوي الزوايا يكون متساوي الاضلاع أيضاً

## نظريّة

(٢٣) المستقيم المنصف لزاوية المثلث المتساوي الساقين المحصورة بين ساقيه يمر بمتوسط قاعدته ويصنع معها زاويتين متجاورتين متساويتين (شكل ١٦)  
إذا كانت زاوية  $b = \hat{a}$  زاوية  $\hat{a}$  يبرهن أولاً على أن  $b = \hat{c}$  وثانياً على أن زاوية  $b = \hat{a}$  زاوية  $\hat{a}$



لذلك يدور الشكل  $\hat{a}$  حول  $\hat{a}$  لانه يابقه على  $\hat{a}$   
فن حيث أن زاوية  $\hat{c} = \hat{a}$  و  $\hat{a}$  فرضاً يأخذ الضلع  $\hat{a}$  الاتجاه  $b$  وحيث كان المثلث متساوي الساقين تقع نقطة  $\hat{c}$  على نقطة  $b$  ولكون نقطة  $\hat{a}$  ثابتة ينطبق  $\hat{c}$  على  $b$  ويكون أولاً  $b = \hat{c}$  وثانياً زاوية  $b = \hat{a}$  زاوية  $\hat{a}$  وهو المطلوب  
تنبيه - المستقيم  $ad$  يسمى بالمستقيم المتوسط للمثلث المتساوي الساقين

## نظريّة

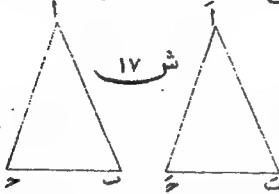
(٢٤) يتساوى المثلثان إذا وجد فيهما واحد من الأمور الآتية  
أولاً - إذا تساوى من أحدهما زاوية والضلعا المحيطان بهما النظائرهما من الثاني  
ثانياً - إذا تساوى من أحدهما ضلع ومجاوراته من الزوايا النظائرهما من الثاني  
ثالثاً - إذا تساوت فيهما الاضلاع الثلاثة كل لنظيره  
الامر الأول - إذا كانت زاوية  $\hat{a} =$  زاوية  $\hat{a}$  والضلع  $\hat{a} =$  الضلع  $b$  والضلع  $\hat{a} =$  الضلع  $\hat{a}$  يبرهن على تساوي باقي الأجزاء المتناظرة فيهما (شكل ١٧)

وذلك لانه اذا أجريت عملية تطبيق بماثله التي أجريت بفترة ٢١ ينطبق المثلثان على بعضهما ويتساويان

الامر الثاني - اذا كان الضلع  $\bar{A} \bar{B}$  = الضلع  $\bar{A} \bar{B}$  وزاوية  $\bar{A}$  = زاوية  $\bar{A}$  وزاوية  $\bar{B}$  تساوي زاوية  $\bar{B}$  يبرهن على تساوى الاجزاء

الباقية منهم على التناظر (شكل ١٧)

وذلك لانه اذا أجريت عملية تطبيق بماثله التي أجريت بفترة ٢٢ ينطبق المثلثان على بعضهما وتساوى فيهما باقى الاجزاء المتناظرة ويكونان متساويين



(تنبيهان) الاول - ما ذكرناه يقتضى أن الاشياء المفروض تساويها في المنطوق تكون موضوعة على ترتيب واحد فاذ لم يكن الامر كذلك لزم ادارة المثلث  $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$  دورة كاملة قبل تطبيقه على الثانى

التنبيه الثانى - الزوايا المتساوية في المثلثين المتساويين تقابل الاضلاع المتساوية فيما

الامر الثالث - اذا كان الضلع  $\bar{A} \bar{B}$  = الضلع  $\bar{A} \bar{B}$  والضلع  $\bar{A} \bar{C}$  = الضلع  $\bar{A} \bar{C}$  والضلع  $\bar{B} \bar{C}$  = الضلع  $\bar{B} \bar{C}$  تساوى الزوايا المتناظرة

فيهما ويكون المثلثان متساويين (شكل ١٨)

للبهنة على ذلك نضع المثلث  $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$  تحت

المثلث  $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$  مقابلا في الوضع بحيث يأخذ

الضلع  $\bar{A} \bar{B}$  الوضع  $\bar{B} \bar{C}$  والضلع  $\bar{A} \bar{C}$

الوضع  $\bar{C} \bar{B}$  ثم نصل  $\bar{A} \bar{D}$  فالمثلث  $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$

يصير اذن متساوى الساقين وبناء عليه تكون

زاوية  $\bar{D} \bar{A} \bar{B}$  = زاوية  $\bar{B} \bar{C} \bar{A}$  (٢١) وكذلك

المثلث  $\bar{A} \bar{D} \bar{C}$  يكون متساوى الساقين

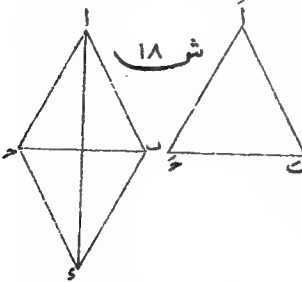
ومنه ينتج أن زاوية  $\bar{D} \bar{A} \bar{C}$  = زاوية  $\bar{D} \bar{C} \bar{A}$  وبناء عليه تكون زاوية  $\bar{B} \bar{A} \bar{C}$  = زاوية  $\bar{B} \bar{C} \bar{A}$

ويكون المثلثان  $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$  و  $\bar{A} \bar{D} \bar{C}$  متساويين لتساوى الضلعين  $\bar{A} \bar{B}$  و  $\bar{A} \bar{D}$  والزاوية

المحصورة بينهما  $\bar{B} \bar{A} \bar{C}$  لنظائرهما من الثانى (الاول) أما اذا تصادف وقوع المستقيم  $\bar{A} \bar{D}$  خارج

الشكل  $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$  بأن كان المثلثان منفرج الزاوية فإن الزاويتين  $\bar{A}$  و  $\bar{D}$  تكونان أيضا

متساويتين لانهما تكونان في هذه الحالة عبارة عن الفرقين الكائنين بين زاويتا متساوية



## نظرية

(٢٥) في أي مثلث الزاوية الكبرى يقابلها الضلع الأكبر والعكس (شكل ١٩)

أولاً - إذا كانت زاوية  $\alpha$  أكبر من زاوية  $\beta$

يكون الضلع  $\alpha$  أكبر من الضلع  $\beta$

لذلك يمتد نقطة  $\alpha$  المستقيم  $\alpha$  بحيث تكون الزاوية

$\alpha$  تساوي الزاوية  $\beta$  فيكون الضلع  $\alpha = \beta$

وب (٢٢) ويؤخذ من المثلث  $\alpha \beta \gamma$  أن

$$\alpha > \beta \text{ أو } \alpha < \beta \text{ أو } \alpha = \beta$$

ثانياً - إذا كان الضلع  $\beta$  أكبر من الضلع  $\alpha$  تكون زاوية  $\alpha$  أكبر من زاوية  $\beta$  وللبرهنة على ذلك يقال لو لم تكن زاوية  $\alpha$  أكبر من زاوية  $\beta$  لكانت إما مساوية لها أو أصغر

منها ففي الحالة الأولى يجب أن يكون الضلع  $\beta$  مساوياً للضلع  $\alpha$  (٢٢) وهو مخالف للفرض

وفي الحالة الثانية يجب أن يكون الضلع  $\beta$  أصغر من الضلع  $\alpha$  (أولاً) وهو مغاير أيضاً للفرض

وبناء عليه يجب أن يكون الضلع  $\beta$  أكبر من الضلع  $\alpha$  وهو المراد

## نظرية

(٢٦) إذا ساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من مثلث آخر وكانت الزاوية المحصورة بين ضلعي

المثلث الأول أكبر من نظيريهما من المثلث الثاني

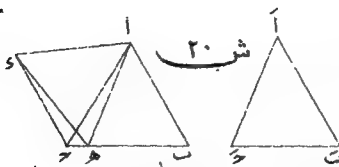
يكون الضلع الثالث من المثلث الأول أكبر من

نظيره من المثلث الثاني (شكل ٢٠)

إذا كان الضلع  $\alpha = \beta$  والضلع

$\alpha = \beta$  وكانت زاوية  $\alpha$  أكبر من

زاوية  $\beta$  يكون الضلع  $\gamma < \delta$



لذلك يرفع المثلث  $\alpha \beta \gamma$  ويوضع على يسار المثلث  $\alpha \beta \delta$  بحيث ينطبق الضلع  $\alpha \delta$

على مساويه  $\alpha \delta$  وبأخذ المثلث الوضع  $\alpha \delta$  ثم تنصف الزاوية الكلية  $\beta \alpha \delta$  بالمستقيم

$\alpha \delta$  فيقع ضرورة داخل الزاوية الكبرى  $\beta \alpha \delta$  ثم يوصل المستقيم  $\delta \epsilon$  فالمثلثان الحادان

$\alpha \delta \epsilon$  و  $\alpha \delta \gamma$  يكونان متساويين لأن فيهما الضلع  $\alpha \delta$  مشترك بينهما والضلع

$\alpha \delta = \alpha \delta$  والزاوية  $\beta \alpha \delta = \beta \alpha \delta$  بالتصنيف (٢٤) الأمر الأول

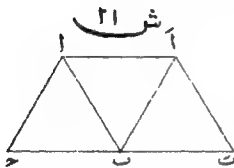


وينتج من تساويهما أن الضلع  $ب هـ = هـ د$  ويؤخذ من المثلث  $هـ د ا$  أن (١٩)  
 $د ا > ا ب$  أو  $د ا > د هـ + هـ ا$  أو  $د ا > ا ب$  وهو المراد  
 نتيجة - عكس هذه النظرية تحقيقى أعنى انه اذا كان  $ا ب = ا ب$  و  $ا ب = ا ب$   
 و  $ب ا < ا ب$  تكون زاوية  $ب ا د < ب ا د$   
 لانه لو لم يكن الامر كذلك لكانت زاوية  $ب ا د$  امامساوية لزاوية  $ا ب د$  أو أصغر منها في الحالة  
 الاولى يجب أن يكون الضلع  $ب د = ب د$  (٢٤) الامر الاول) وفي الثانية يجب أن يكون  
 $ب د > ب د$  (٢٦) وكلاهما مغاير للقرص فتكون اذن زاوية  $ب ا د < ا ب د$  وهو المطلوب

### نظريـة

(٢٧) مجموع زوايا المثلث الداخلة يساوى زاويتين قائمتين (شكل ٢١) أعنى ان

$$ا + ب + ج = ٢٠٠$$



والوصول الى ذلك بمدا المستقيم  $د ب$  على استقامته جهة  $ب$   
 ثم يتصور ان الزاوية  $ا ب د$  على امتداد المستقيم  $د ب$   
 الى أن تأخذ نقطة  $د$  محل النقطة  $ب$  ومن حيث ان  
 الازلاق حاصل في آن واحد بجميع أجزاء المثلث لارتباطها  
 ببعضها فان نقطة  $د$  عندما تصل الى الوضع  $ب$  تصل

أيضا نقطة  $ب$  الى الوضع  $ب$  على بعد من نقطة  $ب$  مساو للبعد  $ب د$  وكذا تصل نقطة  $ا$   
 الى الوضع  $ا$  على بعد منها مساو للبعد  $ب د$  ثم اذا وصل المستقيم  $ا ا$  فالمثلث الحادث  
 $ا ا ب$  يكون مساويا للمثلث الاصلى  $ا ب د$  لان فيهما الضلع  $ا ب$  مشترك بينهما والضلع  
 $ا ب = ا ب$  الضلع  $ا د$  فرضا والضلع  $ا ا = ا ب$  الضلع  $ب د$  وينتج من تساويهما أن زاوية  
 $ا ب ا$  المقابلة للضلع  $ا ا = زاوية ب ا د$  المقابلة للضلع  $ب د$  (٢٤) التنبيه الثاني) وحيث  
 كانت زاوية  $ا ب د = زاوية د$  فرضا يكون مجموع الزوايا الثلاثة المتجاورة  $ب ا د + ا ب د + ا ب د$   
 $+ ا ب د$  مساويا لمجموع زوايا المثلث الداخلة أى  $د + ا ب د + ا ب د + ا ب د$  وحيث كان  
 المجموع الاول مساويا لزاويتين قائمتين (١٥) ثانيا) فيكون المجموع الثانى كذلك وهو المطلوب  
 وينتج من هذه النظرية

أولا - انه اذا مده أحد أضلاع مثلث فان الزاوية الحادثة بين امتداده والضلع المجاور له مثل  
 زاوية  $ا ب د$  تساوى مجموع زوايا المثلث ساعدا المجاورة لها

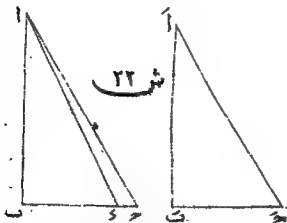
ثانياً - ان مجموع زوايا المثلث الخارجة الحادثة بين امتداد أضلاعه الثلاثة والاضلاع المجاورة لها يساوي أربع قوائم وذلك لان مجموع كل زاويتين متجاورتين موجودتين على كل رأس من رؤس المثلث الثلاثة مساو لقائمتين وحينئذ يكون مجموع الكل مساوياً ٦ قوائم وبطرح مقدار الزوايا الداخلة أى قائمتين من ٦ قوائم يكون الباقي وهو مجموع الزوايا الخارجة فقط مساوياً ٤ قوائم ثالثاً - ان مجموع الزاويتين الحادتين من المثلث القائم الزاوية يساوي زاوية قائمة واذن فهما تملكتان (١٥ تنبيه) فإذا كان المثلث متساوي الساقين كان مقدار كل واحدة منهما نصف زاوية قائمة

رابعاً - انه اذا ساوت زاويتان من مثلث زاويتين اُخريين من مثلث آخر تكون الزاوية الثالثة من الاول مساوية للثالثة من الثاني

خامساً - انه لا يمكن أن يوجد في أى مثلث الزاوية واحدة قائمة أو زاوية واحدة منفرجة سادساً - ان مقدار كل زاوية من زوايا المثلث المتساوي الاضلاع ثلث قائمتين أو ثلثا قائمة سابعاً - انه يمكن الاكتفاء في تساوي المثلثات بتساوي ضلع واحد ومطلق زاويتين من أحدهما لنظائرهما من الثاني وحينئذ فالمثلثان القائمان الزاوية يتساويان اذا ساوى من أحدهما وتر وزاوية دون القائمة أو ضلع وزاوية دون القائمة لنظائرهما من الثاني

## نظريّة

(٢٨) يتساوي المثلثان القائمان الزاوية اذا ساوى من أحدهما وتر وضلع لنظيريهما من الثاني (شكل ٢٢)



اذا كان الوتر  $AB = A'B'$  الوتر  $AC = A'C'$  والضلع  $BC = B'C'$  يكون المثلثان القائمان الزاوية  $ABC$  و  $A'B'C'$  متساويين وللبرهنة على ذلك يرفع المثلث  $ABC$  ويطبق على المثلث  $A'B'C'$  بأن يوضع الضلع  $AB$  على مساويه  $A'B'$  وحيث ان زاوية  $C$  تساوي زاوية  $C'$  بالقيام بأخذ الضلع  $BC$

الاجزاء  $B$  و  $C$  وتقع نقطة  $C'$  على نقطة  $C$  اذ لو فرض خلاف ذلك لزم أن تقع داخلًا أو خارجًا عنها فاذا فرض وقوعها في نقطة  $D$  فيكون  $AC = AD$  ويكون المثلث  $ADC$

متساوي الساقين لان  $\angle = \angle$  وتكون اذن زاوية  $\angle =$  زاوية  $\angle$  لكنه بالتأمل نرى أن زاوية  $\angle$  حادة لانها أصغر من قاعة (٢٧ ثالثا) وزاوية  $\angle$  الخارجة عن المثلث  $\angle$  منفرجة لانها أكبر من قاعة (٢٧ أولا) وتساويها محال وماتج هذا الامر فرض وقوع نقطة  $\angle$  داخل نقطة  $\angle$  وبمثل ذلك يبرهن على عدم امكان وقوعها خارجا عنها وحينئذ لا بد أن تقع عليها وينطبق المثلثان على بعضهما وبصيران متساويين وهو المطلوب

## الفصل الرابع

(في المستقيمان المتعامدة والمائلة)

(٢٩) المستقيم العمودي على آخر هو ما يصنع معه زاويتين متجاورتين متساويتين ينتج من هذا التعريف وعماد كبري يفرق ١٥ و ٢٣ ما يأتي  
أولا - ان من نقطة على مستقيم لا يمكن أن يقام الامستقيم واحد عمودي عليه  
ثانيا - ان كل مستقيم عمودي على آخر يكون الاخير عمودا عليه  
ثالثا - ان المستقيم المنصف لزاوية رأس المثلث المتساوي الساقين يكون عمودا على قاعدته ويسمى ارتفاعه

(٣٠) المستقيم المائل على آخر هو يصنع معه زاويتين متجاورتين مختلفتين

## نظريّة

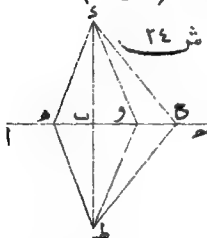
(٣١) كل نقطة مفروضة خارج مستقيم يمكن أن ينزل منها عمود واحد عليه لا اثنان (شكل ٢٣)  
وللبرهنة على ذلك يدعى نقطة  $\angle$  المستقيم  $\angle$  فيكون مع المستقيم  $\angle$  زاويتين  $\angle$  و  $\angle$  ان كانتا متساويتين كان هو العمود المطلوب والافتصوّر تحرك المستقيم المذكور حول نقطة  $\angle$  بحيث تبعد نقطة  $\angle$  شيئا فشيئا عن نقطة  $\angle$  فيشاهد أن الزاوية الكبرى  $\angle$  تأخذ في النقص وأن الزاوية الصغرى  $\angle$  تأخذ في الزيادة وحينئذ لا بد أن يوجد وضع للمستقيم المتحرك مثل  $\angle$  تكون فيه الزاويتان المتجاورتان متساويتين ويكون هو العمود المطلوب



هذا ولواسم المستقيم المتحرك على الحركة بعد وصوله الى الوضع  $\text{ح ه}$  يشاهد أن التساوي الذي كان حاصل بين الزاويتين المتجاورتين قد اختلف ومن ذلك يعلم أنه لا يوجد للمستقيم المتحرك الاوضاع واحد فريد تكون فيه الزاويتان المتجاورتان متساويتين وهو المطلوب

### نظريية

(٢٢) اذا أنزل من نقطة خارج مستقيم عمود عليه وعدة موازات يحدث (شكل ٢٤)



أولاً - ان العمود أصغر من كل موازات

ثانياً - ان المائلين المتساوي البعد عن موقع العمود يكونان متساويين

ثالثاً - ان المائل الذي اختلف عن موقع العمود يبعد أكبر فهو أكبر

الامر الأول - يبرهن على أن العمود  $\text{د ب} > \text{المائل د ه}$  ولذلك يبعد العمود  $\text{د ب}$  على استقامته جهة  $\text{ب}$  ويؤخذ

منه البعد  $\text{د ب} = \text{البعد د و}$  ويوصل  $\text{ه ط}$  فالثلث الحادث  $\text{ه ب ط}$  يكون مساوياً للثلث  $\text{د ب ه}$  لوجود الضلع  $\text{ب ه}$  مشترك بينهما وتساوي الضلع  $\text{ب ط}$  للضلع  $\text{ب د}$  عملاً لمساواة الزاوية  $\text{ط ب ه}$  للزاوية  $\text{ه ب د}$  بالقياس وينتج من تساويهما أن الضلع  $\text{ه ط} = \text{الضلع د ه}$  لكنه يؤخذ من المثلث  $\text{د ه ط}$  أن (١٩)

$$\text{د ط} > \text{أو د ب} + \text{د ب} > \text{د ه} + \text{ه ط} > \text{أو د ب} > \text{د ه} > \text{أو د ب} > \text{د ه}$$

الامر الثاني - اذا كان البعد  $\text{د و} = \text{البعد د ه}$  يبرهن على أن المائل  $\text{د و}$  يساوي المائل  $\text{د ه}$

ولذلك يقال ان المثلثين  $\text{د ب ه}$  و  $\text{د ب و}$  متساويان لاشتراك الضلع  $\text{د ب}$  فيهما ومساواة البعد  $\text{د و}$  للبعد  $\text{د ه}$  فرضاً ومساواة الزاوية  $\text{د ب و}$  للزاوية  $\text{د ب ه}$  بالقياس ومن تساويهما ينتج أن المائل  $\text{د و}$  يساوي المائل  $\text{د ه}$

الامر الثالث - اذا كان البعد  $\text{د ح}$  أكبر من  $\text{ب و}$  يبرهن على أن المائل  $\text{د ح}$  أكبر من  $\text{د و}$  لذلك يوصل المستقيمان  $\text{و ط}$  و  $\text{ح ط}$  ويبرهن كما سبق على أن  $\text{و ط} = \text{د و}$  و  $\text{ح ط} = \text{د ح}$  و حيث كانت نقطة  $\text{و}$  داخل المثلث  $\text{د ح ط}$  يحدث (٢٠)

$$\text{و ط} + \text{د و} > \text{د ح} + \text{ح ط} > \text{أو د و} > \text{د ح} > \text{أو د و} > \text{د ح}$$

وهو المطلوب

تنبيه - اذا وجد المائلان  $هـ$  و  $د$  في جهتي العمود فإنه يؤخذ البعد  $ب$  و يساوى  
 البعد  $ب$   $هـ$  فيكون المائل  $د$  و  $هـ$  ويرهن كما سبق  
 (نتيجة ١) عكس القضايا السابقة حقيقي ويسهل البرهنة عليه  
 (نتيجة ٢) من نقطة خارجة عن مستقيم لا يمكن أن يعد اليه سوى مستقيمين متساويين  
 فائدة - العمود الفريد الذي يمكن مده من نقطة الى مستقيم يقدر به بعد هذه النقطة عن هذا  
 المستقيم

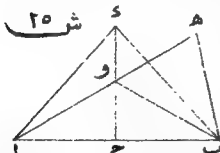
## الفصل الخامس

(في المحل الهندسي)

(٣٣) المحل الهندسي هو المحل الجامع لجميع النقاط المتصلة الخاصة أو التابعة لقانون واحد وهو  
 اما أن يكون مستقيما أو منحنيا أو سطحيا مستويا أو منحنيا ولا تكلم الا على الخط المستقيم منها  
 وما عداه يأتي الكلام عليه في محله

## نظرية

(٣٤) اذا اقيم عمود على وسط مستقيم محدود فكل نقطتين نقطت من هذا العمود تكون على بعدين  
 متساويين من نهايتي المستقيم وكل نقطة خارجة عنه تكون على بعدين مختلفين من نهايتي  
 المستقيم وأطولهما ما كان قاطعا للعمود (شكل ٢٥)



الاول - اذا كان  $د$  عمودا على وسط  $أ ب$  ويرهن  
 على أن البعد  $د ب$  = البعد  $د أ$  ولذلك يقال حيث  
 كان المستقيمان  $د ب$  و  $د أ$  مائتين متساويين البعد  
 عن موقع العمود  $د$  فيكونان متساويين (٣٢ الثاني)  
 الثاني - يطلب البرهنة على أن  $هـ أ < هـ ب$  ولذلك يوصل  $و ب$  فيكون  $و ب = أ ب$  (الاول)  
 وحيث ان المثلث  $هـ ب و$  يؤخذ منه ان  $هـ ب > هـ و + و ب$  (١٩) فلو وضعنا  $ب د$  على  
 $ب و$  ما يساويه وهو  $أ ب$  ينتج أن

$هـ ب > هـ و + و أ$  أو  $هـ ب > هـ أ$  أو  $هـ ب > هـ و$  وهو المطلوب

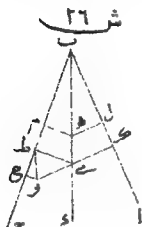
نتيجة - كل مستقيم تكون جميع نقطه متساوية البعد عن نهايتي مستقيم معلوم يلزم أن  
 يكون عمودا على وسطه

## نظرية

(٣٥) اذا انصفت زاوية بمستقيم تكون كل نقطة من نقطة على بعدين متساويين من ضلعيها وكل نقطة خارجة عنه تكون على بعدين مختلفين منهما وأطولهما

القاطع للمستقيم المنصف (شكل ٢٦)

الاول - يطلب البرهنة على أن البعد  $هـ ل$  = البعد  $هـ م$   
ولذلك يقال ان المثلثين  $ب ل هـ$  و  $ب م هـ$  القائمي الزاوية  
متساويان لوجود الوتر  $ب هـ$  مشترك فيهما ولساواة الزاوية  
 $ل ب هـ$  للزاوية  $هـ م ب$  فرضا (٢٧ سابعاً) وينتج من  
تساويهما أن  $هـ ل$  =  $هـ م$



الثاني - يبرهن على أن البعد  $و ك$  <  $و ح$  ولذلك ينزل العمود  $ع ط$  فيكون مساوياً  
 $ع ك$  (الاول) فاذا وصل  $و ط$  نحصل  $و ط$  >  $و ع$  +  $ع ط$  أو  $و ط$  >  $و ك$   
وحيث كان  $و ح$  عموداً على  $ب$  فيكون أصغر من المائل  $و ط$  وعليه يكون  
 $و ح$  >  $و ك$  أو  $و ك$  <  $و ح$

(نتيجة ١) كل مستقيم مارين ضلعي زاوية وكانت كل نقطة من نقطة على بعدين متساويين  
من ضلعيها يكون منصفاً لها

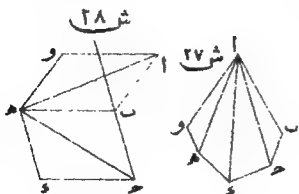
(نتيجة ٢) المستقيمان المنصفان لزاويتين متكاملتين يكونان متعامدين

## الفصل السادس

(في الاشكال المعقّدة)

(٣٦) السطوح المستوية المحددة بجملة مستقيمتين متقاطعتين تسمى أشكالاً كثيرة الاضلاع  
أو مضلعات مستوية وأبسط هذه الاشكال هو المثلث وماله أربعة أضلاع يسمى شكلاً رباعياً  
وماله خمسة يسمى خماسياً وماله عشرة أضلاع

يسمى ذا العشرة الاضلاع وهكذا فالشكل  
أب  $ح د هـ و$  (شكل ٢٧) يدل على شكل  
سداسي جميع زواياه بارزة أى فقعاتها داخل  
الشكل وأما (الشكل ٢٨) فانه يدل على شكل



سداسى احدى زوايا داخله بمعنى أن انقراجها خارج الشكل فالشكل الاول يسمى شكلا محدبا والثاني غير محدب

فالشكل المحدب هو الذى اذا مدت أى ضلع من أضلاعه يجعل الشكل كله فى احدى جهتيه بخلاف الشكل الغير المحدب فإنه اذا مدت منه الضلع  $\alpha$  مثلا على استقامته فإنه بقسم الشكل الى جزأين كل جزء منهما فى جهة من جهتيه

(٣٧) المستقيمت أه و اد و اح الواصلة بين رؤس زوايا الشكل الغير المتجاورة تسمى أقطار الشكل فالمثلث ليس له أقطار والشكل الرباعى له اثنان والخماسى له خمسة والسداسى له تسعة وعلى العموم اذا رمزنا بحرف  $\alpha$  الى عدد أضلاع شكل ما كان عدداً أقطاره مساويا  $\frac{\alpha(\alpha-3)}{2}$  وذلك لان الشكل الذى عدداً أضلاعه  $\alpha$  يتولد عنه أقطار واصله من رأسه عددها  $\alpha-3$  وبضرب هذا المقدار فى عدد الزوايا يتوصل الى العدد  $\frac{\alpha(\alpha-3)}{2}$  الا أنه يشاهد أن كل قطر منها محسوب مرتين واذن بقسمة المقدار السابق على ٢ يتوصل الى  $\frac{\alpha(\alpha-3)}{4}$  وهو يدل على مقدار الاقطار التى يمكن وجودها فى أى شكل فهو اذن القانون العمومى الذى يعرف منه مقدار أقطار أى شكل فأقطار الشكل دى العشرين ضلعا هى

$$\frac{20(20-3)}{4} = 170 \text{ قطرا}$$

## نظريّة

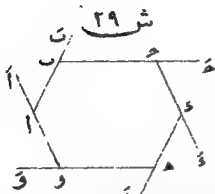
(٣٨) مجموع الزوايا الداخلة لاي شكل كثير الاضلاع يساوى من القوائم بقدر عدد أضلاعه الا اثنين مضروبا فى اثنين

وللبرهنة على ذلك توصل أقطاره الخارجة من رأس واحدة (شكل ٢٧) فينقسم بذلك الشكل الى مثلثات بقدر عدد أضلاعه الا اثنين لان كل ضلع من أضلاع الشكل مرسوم عليه مثلث ماعدا الضلعين المحيطين برأسه وحيث انه تقدم بمرّة ٢٧ أن مجموع زوايا المثلث يساوى زاويتين قائمتين فيحتوى الشكل اذن على قوائم بقدر ضعف عدد المثلثات أو بقدر عدد أضلاعه الا اثنين مضروبا فى اثنين فاذا جعل  $\alpha$  رمزاً لعدد أضلاع الشكل تحصل هذا القانون  $\frac{\alpha(\alpha-2)}{2}$  وهو المطلوب

نتيجة - ينتج مما ذكر أن مقدار الزوايا القائمة الموجودة فى أى شكل رباعى مساوية الى  $\frac{4(4-2)}{2} = 4$  أى أربع قوائم وزوايا الشكل الخماسى تعادل ست قوائم والسداسى ثمانية وهكذا

## نظرية

(٢٩) إذا مدت أضلاع أى شكل مهما كان عددها في جهة واحدة كان مجموع الزوايا الخارجة المتكوّنة من كل ضلع وامتداد الضلع المجاور له مساويا أربع قوائم (شكل ٢٩)



وللبرهنة على ذلك يلاحظ أنه بإضافة كل زاوية خارجة مثل  $\hat{ا}$  إلى مجاورتها يتحصل من مجموعها زاويتان قائمتان وأن هذا المجموع مكرر مراراً بقدر عدد الأضلاع أعني أن مجموع الزوايا الداخلة للشكل والخارجة عنه مساو من القوائم بقدر ضعف عدد أضلاعه فإذا طرح من هذا المجموع مقدار مجموع الزوايا القائمة الموجودة

في زوايا الشكل الداخلة المساوية إلى ضعف عدد أضلاعه الاثنى عشر كان الباقي وهو  $٢ \times ٢$  أو ٤ قوائم يدل على مجموع الزوايا القائمة المشتمل عليها مجموع الزوايا الخارجة وهو المراد

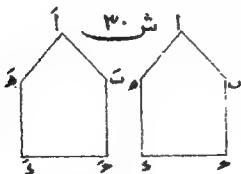
تليقصة - أى شكل كثير الأضلاع لا يمكن أن يحتوي على أكثر من ثلاث زوايا واحدة لأنه لو احتوى على أكثر من ذلك لوجد في زواياه الخارجة أربع زوايا بالقل يكون مجموعها أكبر من أربع قوائم وهو محال

## تعريف

(٤٠) كثيرا الأضلاع المتحدان في عدد الأضلاع يكونان متساويين إذا تراكبا من مثلثات متساوية متحدة العدد ومتشابهة وضعاً أعني إذا وضع أحدهما على الآخر انطبق عليه انطباقاً تاماً

## نظرية

(٤١) يتساوى كثيرا الأضلاع المتحدان في عدد الأضلاع إذا تساوت منهما الأضلاع والزوايا المتناظرة بقطع النظر عن معرفة تساوى ضلع والزوايتين المجاورتين له من أحدهما النظائرهما من الثاني (شكل ٣٠)



مثلاً إذا تساوت الزوايا  $\hat{ا}$  و  $\hat{ب}$  و  $\hat{ح}$  من كثير الأضلاع  $ا ب ح د ه$  نظائرهما على الترتيب  $\hat{ا}$  و  $\hat{ب}$  و  $\hat{ح}$  من كثير الأضلاع  $ا ب ح د ه$  المتحد مع الأول في عدد الأضلاع وكانت الأضلاع

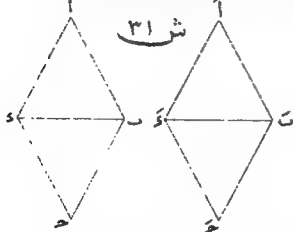


ا ب و ج و د من الاول مساوية على الترتيب لنظائرهما ا ب و ج و د من الثاني  
 بقطع النظر عن معرفة تساوى الضلع د ه لنظيره د ه وعن تساوى الزاويتين د و ه  
 المحيطتين بالضلع الاول لنظائرهما د و ه من الثاني يلزم أن يكون كثيرا الاضلاع متساويين  
 وللبهنة على ذلك نضع كثيرا الاضلاع الثاني على الاول بحيث ينطبق الضلع ا ه على مساويه  
 ا ه ومن تساوى الزاوية ا لنظيرتها ا ينطبق الضلع ا ب على مساويه ا ب وتقع  
 النقطة ب على ب وتساوى الزاوية ب لنظيرتها ب يقع الضلع ب ج على مساويه  
 ب ج وتقع نقطة ج على نقطة ج وبكذلك ينطبق الضلع ج د على ج د وحيث ان  
 نهايتي الضلع د ه قد انطبقتا على نهايتي الضلع د ه فينطبق الشكلان على بعضهما  
 انطباقا تاما ويكونان متساويين

نتيجة - ينتج من ذلك ان كثيرا الاضلاع الذي عدد اضلاعه ٥ يتعين تعيينها تاما اذا علم  
 منه معالم قدرها ٢ - ٣ وذلك لانه يحتاج الى معالم من اضلاعه قدرها ٥ - ١ ومن  
 زواياه قدرها ٥ - ٢ وحيث ان المثلث يتعين بمعالم قدرها ٢ - ٣ = ٣ - ٣ أي ثلاثة  
 معالم والشكل الرباعي بخمسة والخاص بسبعة وهكذا

### نظريّة

(٤٢) يتساوى الشكلان الرباعيان اذا تساوى فيهما زاوية والاضلاع الاربعة كل نظيره (شكل ٣١)



مثلا اذا فرض في الشكلين الرباعيين  
 ا ب ج د و ا ب ج د ان زاوية ا =  
 زاوية ا والضلع ا ب = ا ب والضلع  
 ب ج = ب ج والضلع ج د = ج د والضلع  
 د ا = د ا والضلع د ا = د ا  
 يكونان متساويين

وللبهنة على ذلك يعد القطران ب د و ب د

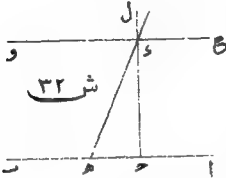
فيحدث من ذلك المثلثان ا ب د و ا ب د المتساويان لتساوى زاوية والضلعين المحيطين بهما من  
 أحدهما النظائرهما من الثاني وينتج من تساويهما تساوى الضلع ب د والضلع ب د وحيث ان  
 يكون المثلثان ب د و ب د متساويين لتساوى أضلاعهما المتناظرة فيهما وبناء عليه  
 يكون الشكلان الرباعيان متساويين لتركبهما من مثلثات متساوية متحدة العدد ومماثلة وضعها

## الفصل السابع

### (في المستقيمات المتوازية)

(٤٣) المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان موجودان في مستو واحد ولا يمكن تلاقهما مهما امتدا

فإذا فرض مستقيم مثل  $AB$  (شكل ٣٢) وأقيم من إحدى نقطه  $C$  عمود عليه  $CD$  وممن نقطة  $E$  إحدى نقطه هذا العمود المستقيم  $DE$  بحيث يكون قاطع المستقيم  $AB$  فالزاويتان الحادتان  $CDE$  و  $EDC$  من المستقيم القاطع  $DE$  والمستقيمين  $AB$  و  $CD$  مجموعهما يساوي قائمة (٢٧) (مثلاً)



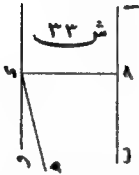
إذا تقتر هذا وفرض تحريك المستقيم  $DE$  حول نقطة  $E$  بحيث بعد نقطة  $E$  شيئاً عن نقطة  $C$  يشاهد ازدياد الزاوية  $CDE$  مع نقصان تمليتها  $EDC$  فإذا استمر المستقيم المتحرك في حركته فإنه لا بد أن يأتي له وضع مثل  $DE$  تكون فيه زاوية  $CDE$  قائمة لكن هذا لا يتأتى إلا إذا انعدمت زاوية  $EDC$  كلية بواسطة تباعد نقطة  $E$  عن نقطة  $C$  إلى غير نهاية وحينئذ فيقال للمستقيمين في هذه الحالة إنهما متوازيان

ويمكن إعادة ما ذكر بخصوص وضع المستقيم  $DE$  حينما يكون على يمين المستقيم  $AB$  واذن فكل مستقيم مار بنقطة  $E$  وصانع مع  $AB$  زاوية دون القائمة في إحدى جهتيه يمكن اعتباره كأنه أحد أوضاع المستقيم المتحرك  $DE$  قبل وصوله إلى الوضع النهائي  $CD$  أعني أنه لا بد أن يصنع امتداده مع المستقيم  $AB$  زاوية تكون تمامية للزاوية التي يصنعها مع العمود  $CD$  وحينئذ فيقال على وجه العموم إنه إذا أقيم عمود على مستقيم من إحدى نقطه وممن نقطة أخرى منه مائل عليه فإن المائل إذا امتد يقطع العمود

### نظريّة

(٤٤) كل نقطة مفروضة خارج مستقيم يمكن أن يمد منها مستقيم واحد مواز له لاثنان (شكل ٣٣)

برهان الأول ينزل من نقطة  $\epsilon$  العمود  $\delta$  على المستقيم  $اب$  فيقامن نقطة  $\delta$  العمود  $\delta$  على المستقيم  $\delta$  فيكون  $\delta$  موازيا إلى  $اب$  (٤٣)

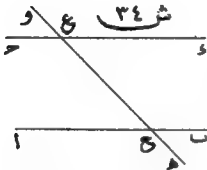


وبرهان الثاني يقال لو أمكن مد مستقيم آخر  $\delta$  موازيا للمستقيم  $اب$  فمن حيث أن المستقيم  $\delta$  عمود على  $\delta$  فيكون  $\delta$  مائلا عليه وبامتداده يقطع المستقيم  $اب$  (٤٣) وأذن فلا يكون موازيا له

(نتيجة ١) المستقيمان العمودان على مستقيم ثالث متوازيان  
(نتيجة ٢) المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودا على الثاني لأنه لم يكن هذا الثاني عمودا لكان مائلا عليه وحيث إذا امتد يقطع الموازي له وهو محال

(نتيجة ٣) المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان لأنه لم يكون كذلك لتلاقيا في نقطة ومن هذا ينتج إمكان مرور مستقيمين موازيين لمستقيم ثالث من نقطة واحدة وهو محال

(٤٥) إذا قطع مستقيم مستقيمين (شكل ٣٤) تكون من التقاطع ثمان زوايا متساوية مثنى لحصول التقابل بالرؤس فإذا اعتبرنا تلك الزوايا بالنسبة لوضع المستقيمين سميت أربعة منها داخلية والأربعة الباقية خارجية



وإذا اعتبرت بالنسبة للقاطع سميت متبادلة داخلية أو متبادلة خارجية أو متناظرة أو مجاورة داخلية أو مجاورة خارجية

ولتوضيح تلك التسمية نقول

أولا - الزاويتان المتبادلتان الداخلتان هما مثل الزاويتين  $\angle ع$  و  $\angle ج$  والزاويتين  $\angle د$  و  $\angle ا$

ثانيا - الزاويتان المتبادلتان الخارجتان هما مثل الزاويتين  $\angle و$  و  $\angle هـ$  والزاويتين  $\angle ز$  و  $\angle ب$

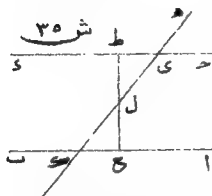
ثالثا - الزاويتان المتناظرتان هما مثل الزاويتين  $\angle و$  و  $\angle ج$  والزاويتين  $\angle د$  و  $\angle ا$  والزاويتين  $\angle ز$  و  $\angle ب$  والزاويتين  $\angle ع$  و  $\angle هـ$

رابعا - الزاويتان المجاورتان للقاطع الداخلتان هما مثل الزاويتين  $\angle و$  و  $\angle ا$  والزاويتين  $\angle د$  و  $\angle ج$

خامسا - الزاويتان المجاورتان للقاطع الخارجتان هما مثل الزاويتين و ع د و ب ح ه  
والزاويتين ح ع د و ا ح ه

## نظريّة

(٤٦) اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فالزاويتان المتبادلتان الداخلتان متساويتان  
(شكل ٣٥)



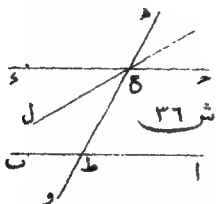
وبرهان ذلك تنصف البعدى ك بنقطة ل ثم ننزل منها  
العمود ل ح على المستقيم ا ب ويمد على استقامته  
فيكون ضرورة عمودا على ح د (٤٤ نتيجة ٢) فالثلاثان  
القائمان الزاوية الحادتان يكونان متساويين لان فيهما الوتر  
ل = لوتر ل ك عملا والزاوية ل ط = الزاوية

ح ل ك لتقابلهما بالرؤس وينتج من تساويهما (٢٧ سابعاً) ان الزاوية ل ط = الزاوية  
ح ك ل وهو المطلوب

تنبيه - بناء على ما تقدم تسهل البرهنة على تساوى الزوايا المتبادلة الخارجة والمتناظرة وعلى  
تكامل الزوايا المجاورة للقاطع الداخلة والخارجة

## نظريّة

(٤٧) اذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاويتان المتبادلتان الداخلتان متساويتين يكون  
المستقيمان متوازيين (شكل ٣٦) أى اذا كانت زاوية  
ح ط = زاوية ا ط ح يكون المستقيم ح د موازيا  
للمستقيم ا ب



وللبرهنة على ذلك يقال لو فرض أن ح د غير مواز  
للمستقيم ا ب بل ان الموازى له مستقيم آخر مثل ح ل  
لكانت زاوية ل ح ط = زاوية ا ط ح = ح ط وهو

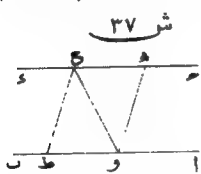
محال لان زاوية ل ح ط جزء من زاوية ح ط و ما نشأ هذا الا من فرض أن الموازى للمستقيم  
ا ب هو غير ح د وهو المطلوب

(تنبيه ١) يبرهن على ذلك على توازي المستقيمين المذكورين اذا كانت الزوايا المتبادلة الخارجة متساوية أو كانت الزوايا المتناظرة كذلك أو كانت الزوايا المجاورة للقاطع داخله أو خارجة مكملة لبعضهما متى

(تنبيه ٢) من المعامول انه اذا لم يتوفر شرط من الشروط السابقة فلا يكون المستقيمان متوازيين

## نظرية

(٤٨) المستقيمان المتوازيان المحصورين مستقيمين متوازيين تكون متساوية (شكل ٣٧)



أعني ان المستقيمين هـ و و ح ط المتوازيين المحصورين بين المستقيمين أ ب و هـ المتوازيين أيضا يكونان متساويين

والبرهنة على ذلك عند المستقيم ح و فالتثلثان الحادان هـ و ح و ح و ط يكونان متساويين لان الضلع ح و مشترك فيهما ولان زاوية هـ و ح = زاوية و ح ط لكونهما متبادلتين داخليتين بالنسبة للمستقيمين المتوازيين هـ و و ح ط وللقاطع ح و (٤٦) ولان زاوية هـ و ح = زاوية و ح ط لكونهما متبادلتين داخليتين أيضا بالنسبة للمستقيمين أ ب و هـ المتوازيين ولعین القاطع ح و وينتج من تساويهما ان الضلع هـ و = الضلع ح ط وهو المراد

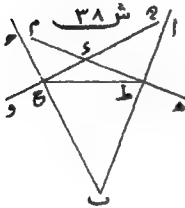
نتيجة - اذا كان المستقيمان المتوازيان هـ و و ح ط عمودين على كلا المستقيمين المتوازيين فيكونان متساويين أيضا لانهما يصيران متوازيين ولما كان العمود المحصور بين المتوازيين يقدر به البعد المحصور بينهما أمكن أن يقال على وجه العموم ان المستقيمين المتوازيين هما على أبعاد متساوية في جميع امتدادهما

تنبيه - عكس هذه النظرية حقيقي دائما أعني انه اذا كان المستقيمان هـ و و ح ط متساويين ومتوازيين يكون المستقيمان أ ب و هـ الحاصران لهما متوازيين (شكل ٣٧) والبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين هـ و ح و ح ط متساويان لان الضلع ح و مشترك فيهما والضلع هـ و = ح ط فرضا وحيث انهما متوازيان والمستقيم ح و قاطع لهما تكون الزاويتان المتبادلتان هـ و ح و ح ط متساويتين وينتج من تساويهما ان زاوية هـ و ح = زاوية و ح ط وحيث ان هاتين الزاويتين هما متبادلتان داخليتان يكون المستقيمان أ ب و هـ متوازيين (٤٧)

نتيجه - اذا كان المستقيمان هـ و ع ط المتساويان والمتوازيان عمودين على أحد المستقيمين المقروطين فيكونان ضروريه عمودين على الثاني وحيتثذيعكن أن يقال ان كل مستقيمين على أبعاد متساوية في جميع امتدادهما يكونان متوازيين

### نظريه

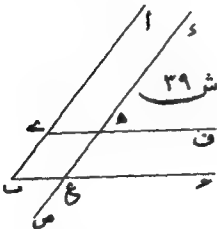
(٤٩) المستقيمان العمودان على ضلعي زاوية لا يكونان متوازيين (شكل ٣٨)



اذا فرضت زاوية أ ب ح وكان المستقيم م هـ عمودا على الضلع أ ب و د و عمودا على ح ب فلا يكون المستقيمان م هـ و د و متوازيين وللبهرنة على ذلك يوصل المستقيم ع ط فن حينئذ كل واحد من الزاويتين م ط ع و د ع ط دون القائمة فيكون مجموعهما أقل من قائمتين وحيتثذعلا يكون م ط موازيا د و (٤٧ تنبيه ٢) وهو المراد

### نظريه

(٥٠) الزاويتان اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية تكونان اما متساويتين أو مكملتين لبعضهما فتكونان متساويتين اذا كانت أضلاعهما المتناظرة متحدتي الوجهة متني أو متضادتي كذلك وتكونان مكملتين لبعضهما اذا كان غير ذلك



(شكل ٣٩)

فالزاويتان أ ب ح و د هـ ف اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية ومتحدتي الوجهة متني تكونان متساويتين وذلك لانه لو مد المستقيم د هـ على استقامته حتى يقابل المستقيم ح ب في نقطة ع لكادت زاوية د هـ ع = زاوية ب بالتناظر وتساوى زاوية د هـ ف أيضا وحيتثذع تكون زاوية د هـ ف = زاوية ب

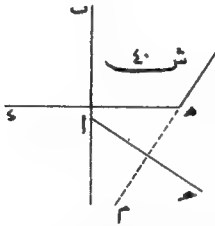
والزاويتان ع هـ ص و أ ب ح اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية ومتضادتي الوجهة متني تكونان متساويتين

لان زاوية ع هـ ص = زاوية د هـ ف = زاوية ب

وأما الزاويتان  $\delta$  هـ و  $\epsilon$  اب  $\delta$  اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية واثنتان منهما متحدان في الجهتين الاثنان الآخران متضادان فيها تكونان متكاملتين  
لان زاوية  $\delta$  هـ مكله لزاوية  $\delta$  هـ ف أولساويتها  $\epsilon$  اب وهو المطلوب  
تنبيه - اذا تم معرفة الزاوية الواقعة بين مستقيمين لعدم تقاطع ضلعيهما على ورق الرسم وأريد معرفة الزاوية المذكورة فإنه تؤخذ نقطة بين ضلعي الزاوية المذكورة ويرسم منها مستقيمان موازيان لضلعيها فالزاوية الحادثة بينهما تكون مساوية للزاوية المطلوبة بعرفتها

### نظريه

(٥١) الزاويتان اللتان أضلاعهما المتناظرة متعامدة تكونان اما متساويتين أو مكملتين لبعضهما (شكل ٤٠)



اذا فرضنا أن المستقيم  $\delta$  هـ عمود على  $\epsilon$  اب والمستقيم  $\delta$  هـ عمود على  $\epsilon$  اب تكون الزاويتان  $\delta$  هـ و  $\epsilon$  هـ م  
احداهما مساوية لزاوية  $\epsilon$  اب والاخرى مكملتها  
وللبرهنة على ذلك يتصور دوران الزاوية  $\delta$  هـ حول  
نقطة  $\delta$  بمقدار زاوية قائمة وبدون تغيير مقدارها  
فالوضعان الاخيران اللذان يأخذهما المستقيمان  $\delta$  هـ

و  $\epsilon$  هـ يكونان عمودين على وضعهما الاولين وحينئذ يكونان وازيين للمستقيمين  $\epsilon$  اب و  $\epsilon$  اب  
وتكون الزاوية الحادثة بينهما اما مساوية لزاوية  $\epsilon$  اب أو مكملتها (٥٠) وهو المراد  
تنبيه - يؤخذ من هذه النظرية والسابقة عليها أن المثلثين اللذين أضلاعهما المتناظرة  
متوازية أو متعامدة تكون زواياهما المتناظرة متساوية فقط

فأذا فرضنا الزاويتين المتناظرتين أي المحصورة بين الاضلاع المتوازية المتناظرة أو المتعامدة كذلك  
بمخروف  $\epsilon$  اب و  $\epsilon$  اب و  $\epsilon$  اب و  $\epsilon$  اب نقول انه لا يمكن أن يفرض بين هذه الزوايا  
سوى أحد هذه الامور الثلاثة وهي

$$(١) \quad \epsilon + \epsilon = ١٨٠ \quad \text{و} \quad \epsilon + \epsilon = ١٨٠ \quad \text{و} \quad \epsilon + \epsilon = ١٨٠$$

$$(٢) \quad \epsilon + \epsilon = ١٨٠ \quad \text{و} \quad \epsilon + \epsilon = ١٨٠ \quad \text{و} \quad \epsilon + \epsilon = ١٨٠$$

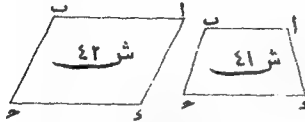
$$(٣) \quad \epsilon = \epsilon \quad \text{و} \quad \epsilon = \epsilon \quad \text{و} \quad \epsilon = \epsilon$$

أما الامر ان الاولان فهما باطلان لانه ينتج من كل منهما ان مجموع زوايا المثلثين أكبر من  $\epsilon$  قوائم  
وحينئذ يكون الثالث حقيقيا

## الفصل الثامن

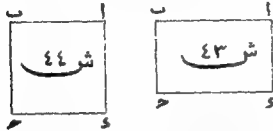
(في الاشكال المتوازية الاضلاع)

(٥٢) شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان فقط يسميان قاعدتيه مثل  $أ ب$  و  $د$  (شكل ٤١)



(٥٣) متوازي الاضلاع هو شكل رباعي أضلاعه المتقابلة متوازية مثل  $أ ب$  و  $د$  (شكل ٤٢) وأنواعه

المستطيل وهو متوازي أضلاعه المتجاورة مختلفة وزواياه قائمة مثل  $أ ب$  و  $د$  (شكل ٤٣)



والمربع وهو متوازي اضلاع أضلاعه متساوية وزواياه قائمة مثل  $أ ب$  و  $د$  (شكل ٤٤)

والمعين وهو متوازي اضلاع أضلاعه متساوية وزواياه غير قائمة مثل  $أ ب$  و  $د$  (شكل ٤٥)

(٥٤) ينتج مما ذكر في بحث المتوازيات الخواص الآتية للشكل المتوازي الاضلاع

أولاً - ان الزوايا المتقابلة من متوازي الاضلاع تكون متساوية لان أضلاعها متوازية ومتضادة في الجهة مثني (٥٠)



ثانياً - ان كل زاويتين موجودتين على ضلع واحد من متوازي الاضلاع هما متكاملتان لانهما زاويتان داخلتان مجاورتان للقاطع

ثالثاً - ان الاضلاع المتقابلة من متوازي الاضلاع تكون متساوية (٤٨) رابعاً - ان قطر متوازي الاضلاع يقسمه الى مثلثين متساويين (٤٨)

## نظريّة

(٥٥) كل شكل رباعي يكون متوازي الاضلاع اذا توفر فيه أحد الامور الآتية وهي

أولاً - اذا تساوت زواياه المتقابلة

ثانياً - اذا كان كل زاويتين منه موجودتين على نهايتي ضلع واحد متكاملتين

ثالثاً - اذا تساوت الاضلاع المتقابلة منه

رابعاً - اذا تساوى ويوازي أي ضلعين متقابلين منه

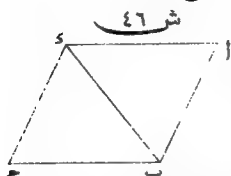


(برهان الاول) يقال حيث كان كل زاويتين متقابلتين منه متساويتين وكان مجموع زواياه الداخلية مساويا قوائم يكون مجموع كل زاويتين موجودتين على نهائى ضلع واحد مساويا قائمتين وهذا يستلزم توازى أضلاعه المتقابلة

(برهان الثانى) داخل في برهان الاول

(برهان الثالث) يقال ان تساوى أضلاعه المتقابلة يستلزم تساوى المثلثين اللذين يحدثان من وصل أحد قطريه لتساوى الاضلاع الثلاثة قيعما وينتج من تساوى المثلثين المذكورين تساوى الزوايا المتقابلة من الشكل الرباعى وحينئذ فيرجع الامر الى الاول

(برهان الرابع) يقال اذا كان الضلع  $AB$  توازى ويساوى الضلع  $CD$  (شكل ٤٦) يكون

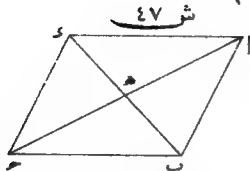


ش ٤٦

المثلث  $ABC$  مساويا للمثلث  $DCB$  لان الضلع  $BC$  مشترك فيهما والضلع  $AB = DC$  فرضا وحيث كان هذان الضلعان متوازيين والمستقيم  $BC$  قاطعا لهما تكون زاوية  $ABC =$  زاوية  $DCB$  لكونهما متبادلتين داخليتين وينتج من تساويهما أن زاوية  $ACB$  تساوى زاوية  $ACD$  وحيث كانتا متبادلتين داخليتين فيكون المستقيمان  $AD$  و  $BC$  متوازيين وهو المراد بانه

## نظرية

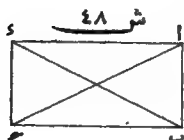
(٥٦) قطر متوازي الاضلاع ينصفان بعضهما (شكل ٤٧)



ش ٤٧

ولبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين  $ADE$  و  $BCE$  متساويان لان فيهما الضلع  $AE = BE$  الضلع  $CE = DE$  من خاصية الشكل (٥٤) ثالثا وفيهما زاوية  $AED =$  زاوية  $BEC$  لانهما متبادلتان داخليتان بالنسبة للمستقيمين المتوازيين  $AD$  و  $BC$  وللقاطع لهما  $AC$  وفيهما أيضا

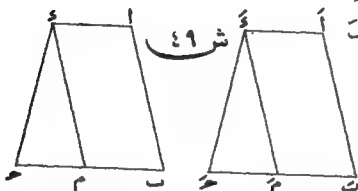
زاوية  $ADE =$  زاوية  $BCE$  لكونهما متبادلتين داخليتين أيضا بالنسبة لعين المستقيمين المتوازيين وللقاطع لهما  $BD$  ومن تساويهما ينتج أن الاضلاع المقابلة للزوايا المتساوية هي متساوية أعني أن  $AD = BC$  و  $AB = DC$  وهو المطلوب



(نتيجة ١) قطرا المستطيل متساويان (شكل ٤٨)  
 لان المثلثين  $\triangle ا د$  و  $\triangle ب د$  فيهما ضلعان والزاوية  
 المحصورة بينهما من أحدهما مساوية لتناظرهما من الآخر  
 (نتيجة ٢) قطرا المربع والمعين ينصفان بعضهما  
 ويكونان متعامدين ولا حاجة للبرهنة على ذلك لسهولة

### نظرية

(٥٧) شبها المنحرف يكونان متساويين متى تساوت فيهما الاضلاع الاربعة النظر لنظيره  
 (شكل ٤٩)



والبرهنة على ذلك يتم من النقطتين  $د$  و  $ز$   
 مستقيمان موازيان للضلعين  $ا ب$  و  $ا د$   
 فيصير  
 $د م = ا ب = ا د = م ب$   
 وأن

وحيث يكون  $م = م$  ويكون المثلثان  $\triangle د م$  و  $\triangle ز م$  متساويين لتساوي  
 أضلاعهما الثلاثة المتناظرة وينتج من تساويهما أن زاوية  $د = ز$  وحيث نقشيهما المنحرف  
 المذكوران يدخلان في النظرية العمومية لتساوي الاشكال الرباعية ثمرة (٤٢)

(تنبيهان) الاول - يتساوى متوازي الاضلاع اذا تساوى من أحدهما زاوية والضلعان  
 المحيطان بهما لتناظرهما من الثاني ويتساوى المعينان اذا تساوى من أحدهما زاوية وضلع نظيره  
 من الثاني

وأما المستطيلان فيمتساويان اذا تساوى من أحدهما ضلعان متجاوران لتظيرهما من الثاني  
 وأما المربعان فيمتساويان اذا تساوى ضلع من أحدهما ضلعان من الآخر  
 ولا حاجة للبرهنة على هذه الامور لسهولة

الثاني - تقدم (٤١ نتيجة) أن أي شكل رباعي يتعين عموما بمعرفة خمسة أشياء معنه وقد علم  
 الآن أن شبه المنحرف يتعين بأربعة فقط ومتوازي الاضلاع بثلاثة والمعين والمستطيل بأثنين  
 والمربع بواحد

## الفصل التاسع

### تمريبات

- ١ - المطلوب رسم زاوية مقيمة لزاوية معاومة
- ٢ - المطلوب رسم زاوية بمكمله لزاوية معاومة
- ٣ - المطلوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين لزاويتين متكاملتين هما متعامدان
- ٤ - المطلوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين لزاويتين متقابلتين بالرؤس يكونان على استقامة واحدة
- ٥ - المطلوب البرهنة على أن مجموع قطري أى شكل رباعي محدب أصغر من مجموع أضلاعه وأكبر من نصف مجموعها
- ٦ - المطلوب البرهنة على أنه إذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصل منها إلى رؤسه بمستقيمات كان مجموع هذه المستقيمات أصغر من مجموع أضلاع المثلث وأكبر من نصف مجموعها
- ٧ - المطلوب البرهنة على أنه إذا وصل من رأس مثلث إلى وسط قاعدته بمستقيم كان هذا المستقيم أصغر من نصف مجموع الضلعين المحيطين به
- ٨ - المطلوب البرهنة على أن مجموع المستقيمات الواصلة من رؤس المثلث إلى أواسط أضلاعه يكون أصغر من مجموع أضلاعه وأكبر من نصف مجموعها
- ٩ - المطلوب البرهنة على أن الاعمدة الثلاثة المقصدة على أواسط أضلاع المثلث تتقاطع في نقطة واحدة
- ١٠ - المطلوب البرهنة على أنه إذا أنزل من نهاية قاعدة مثلث متساوي الساقين عمودان على الساقين كان هذان العمودان متساويين
- ١١ - المطلوب البرهنة على أن المستقيمات المنصفة لزاويا المثلث الثلاث تتقاطع في نقطة واحدة
- ١٢ - المطلوب تعيين المستقيم المنصف لزاوية متكونة من مستقيمين لا يمكن تقاطعهما في حدود الرسم
- ١٣ - المطلوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين لزاويتين أضلاعهما المتناظرة متوازية يكونان أمتوازيين أو متعامدين ومثلثهما المنصفان لزاويتين أضلاعهما المتناظرة متعامدة
- ١٤ - المطلوب البرهنة على أن الاعمدة الثلاثة النازلة من رؤس المثلث على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة
- ١٥ - المطلوب البرهنة على أنه إذا مدمن رؤس أى شكل رباعي مستقيمات متوازية لاقطاره فإنه يتشكل من ذلك شكل متوازي الاضلاع يكون مكانا الضعف الشكل الرباعي الاول

- ١٦ - المطلوب إيجاد المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن مستقيمين متوازيين معلومين
- ١٧ - المطلوب إيجاد المحل الهندسي للنقط الموضوعة على بعد معين من مستقيم معلوم
- ١٨ - المطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعي مثلث يكون موازيا للضلع الثالث ومساويا لنصفه
- ١٩ - ما نوع الشكل الرباعي الذي يحدث إذا وصل بين أواسط أضلاع المربع مستقيمتان
- ٢٠ - المطلوب البرهنة على أن المستقيمتان المصطفيتان لزاوية شكل رباعي يتكوّن عنهما شكل رباعي آخر تكون زواياه المتقابلة متكاملة

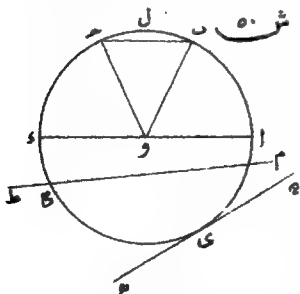
## الباب الثاني

(في محيط الدائرة وما يتعلق به)

### الفصل الاول

(تعريف)

(٥٨) محيط الدائرة هو خط منحني جميع نقطه على أعلام متساوية من نقطة داخله تسمى مركزا (شكل ٥٠)



فالخط المنحني  $ABCD$  يسمى محيط الدائرة ونقطة  $O$  تسمى مركزا وبعبارة أخرى محيط الدائرة هو المحل الهندسي الجامع لجميع النقط المتساوية البعد على نقطة ثابتة تسمى مركزا والدائرة هي جزء المستوى الخطاط بهذا الخط المنحني كل مستقيم مار بالمركز ومنتهى بنقطة من المحيط يسمى نصف قطر مثل  $OA$  وكل مستقيم مار بالمركز ومنتهى بنقطين من المحيط يسمى قطرا فيناء على هذا وعلى تعريف محيط الدائرة تكون أنصاف الاقطار متساوية والاقطار كذلك

القوس هو جزء من المحيط مثل ب ل ح

وتر القوس هو المستقيم الواصل بين نهايتيه مثل المستقيم ب ح غير أن هذا المستقيم يعتبر وترًا لقوس آخر ب أ ي د ح وحينئذ فكل وتر يقابله قوسان مجموعهما يساوي المحيط

القطعة هي جزء من الدائرة محصور بين قوس وتر مثل القطعة ب ل ح ولما كان الوتر ب ح يقابله قوسان فيقابله أيضا قطعتان مجموعهما مساو للدائرة

متى أطلق لفظ القوس أو القطعة لايههم من ذلك الا القوس الصغير أو القطعة الصغيرة لانهما هما المقصودان عند عدم التقييد

القطاع هو جزء من الدائرة محصور بين قوس ونصف القطرين المارين بنهايتيه مثل أ ب ح

قاطع الدائرة هو المستقيم الذي يقطع محيطها في نقطتين مثل المستقيم م ط

المماس هو المستقيم الذي لا يشترك مع محيط الدائرة الا في نقطة واحدة تسمى نقطة التماس مثل المستقيم د ي ه ونقطة ي هي نقطة التماس

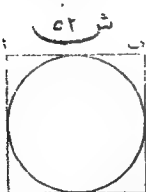
الزاوية المركزية هي الزاوية التي يكون رأسها بالمركز وضلعاهما نصفان مثل الزاوية ح و د الزاوية المرسومة داخل الدائرة أو المحيطية هي ما كانت رأسها على المحيط وضلعاهما وتران مثل زاوية

أ ب ح من (شكل ٥١)



المثلث المرسوم داخل الدائرة هو ما كانت رؤسه على المحيط وأضلاعه أوتاراً فيه مثل أ ب ح ويقال على وجه العموم لاي شكل انه مرسوم داخل الدائرة متى كانت رؤسه على المحيط وأضلاعه أوتاراً فيه محيط الدائرتين التماسان هما اللذان لا يشتركان الا في نقطة واحدة فقط

والزاوية المرسومة خارج الدائرة هي ما كانت رأسها خارج الدائرة وضلعاهما مماسين لمحيطها مثل زاوية ب (شكل ٥٢)

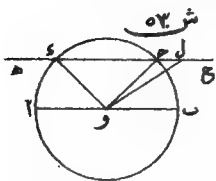


الشكل المرسوم خارج الدائرة ما كانت أضلاعه مماسة لمحيطها مثل أ ب ح د ويقال للدائرة في هذه الحالة انها مرسومة داخل الشكل

### نظريّة

(٥٩) قاطع الدائرة لا يمكن أن يقطع محيطها في أكثر من نقطتين (شكل ٥٣)

أعني أن القاطع هـ ح لا يمكن أن يقطع محيط دائرة و في غير النقطتين د و هـ



ش ٥٣

اذ لو فرض أنه يقطع المحيط في نقطة ثالثة مثل ل ووصلنا المستقيمت ول و د و د ل لزم أن تكون هذه المستقيمت كلها متساوية لانها اذن أنصاف أقطار لدائرة واحدة لرورها جميعها بالمركز ولا انتهاء كل منها بنقطة من نقط المحيط وهو باطل كما تقدم (٣٢ الامر الثالث نتيجة ٢)

ومناشأ هذا الامن فرض أن المستقيم يقطع المحيط في نقطة ثالثة وبذا ثبت المطلوب

تنبيه - يشاهد من الشكل المذكور أن الضلع د هـ > د و + و د أو د هـ > د ب أعني أن أكبر المستقيمت التي يمكن رسمها داخل الدائرة هو القطر

## نظريــــــــــــــــة

(٦٠) قطر الدائرة يقسمها الى قسمين متساويين

وذلك لانه لو طبق جزء الدائرة العلوى على جزءها السفلى حول القطر فانهما ينطبقان على بعضهما كمال الانطباق اذ لو فرض خلاف ذلك بأن كان بعض نقط أحد الجزأين وقع داخلاً أو خارجاً لتكون ضرورة أبعد هذه النقط عن المركز غير متساوية وهو يخالف لتعريف الدائرة وبناء عليه فلا بد من حصول الانطباق التام

وهذه نظرية يستفاد منها تساوى الدائرتين المرسومتين بنصفى قطرين متساويين لانه اذا وضع مركز أحدهما على مركز الاخرى فإنه لابد من انطباق جميع نقط محيطيهما على بعضهما تماماً

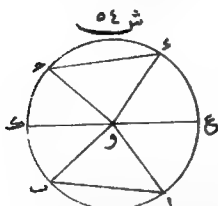
## الفصل الثانى

( فى الاوتار والاقواس )

## نظريــــــــــــــــة

(٦١) فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية الاقواس المتساوية أوتارها متساوية وبالعكس أى ان الاوتار المتساوية أقواسها متساوية (شكل ٥٤)

مثلا في دائرة و اذا كان القوس  $ا ب =$  القوس  $د ه$  يكون الوتر  $ا ب =$  الوتر  $د ه$   
وبالعكس اذا كان الوتر  $ا ب =$  الوتر  $د ه$  يكون القوس  
 $ا ب =$  القوس  $د ه$

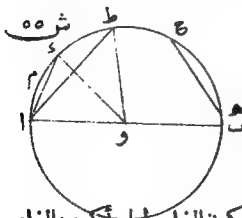


والبرهنة على الشق الاول من هذه النظرية يعلمن نقطة  
ك وسط القوس  $ب د$  القطر ك ع ثم يطبق نصف  
المحيط ك د ه على نصف المحيط ك ب ا ع فحينئذ  
نقطة ك هي وسط القوس  $ب د$  تقع نقطة د على  
نقطة ب وحيث ان القوس  $د ه =$  القوس  $ب ا$  تقع نقطة د على نقطة ا وحينئذ  
يتطبق الوتر  $د ه$  على الوتر  $ب ا$  لاشتراكهما في نقطتين ويكونان متساويين

والبرهنة على الشق الثاني يقال اذا واصلت ا ن م ا ف الاقطار و ا و و د و و د حدث  
المثلثان د و د و ب ا المتساويان لتساوي أضلاعهما الثلاثة المتناظرة وينتج من تساوي  
المثلثين المذكورين تساوي الزاويتين د و د و ب ا فاذا طبق نصف المحيط ك د ه  
على النصف الآخر ك ب ا ع فالمثلثان د و د و ب ا ينطبقان على بعضهما ويتحد  
الوتران د ه و ب ا وبناء عليه يتساوى القوسان د ه و ب ا وهو المراد  
تنبيه - الشق الثاني من هذه النظرية لا يكون حقيقيا الا اذا كان كل واحد من القوسين  
في آن واحد إما أصغرا أو أكبر من نصف المحيط

## نظرية

(٦٢) في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية القوس الاكبر يكون وتره أكبر وبالعكس أي أن  
الوتر الاكبر يكون قوسه أكبر هذا اذا لم يتجاوزا القوس  
نصف المحيط والا كان عكس ذلك (شكل ٥٥)



والبرهنة على ذلك يؤخذ القوس ا م د مساويا للقوس  
ه ه الاصغر فيكون الوتر ا د مساويا للوتر ه ه (٦١)  
ثم يوصل ا د و د و ط و فالمثلثان ا د و  
و ا د ط فيهما الضلع ا د مشترك والضلع و د = و ط  
لكنه حيث كانت زاوية ا د ط أكبر من زاوية ا د ه يكون الضلع ا ط أكبر من الضلع  
ا ه أو أكبر من المساوي له ه ه (٦٦) وهو المراد

وانا كل الوتر اط أكبر من الوتر هـ هـ يكون القوس ا م ط أكبر من القوس هـ هـ اذلو  
فرض خلاف ذلك فاما أن يكون القوس ا م ط مساويا للقوس هـ هـ أو أصغر منه فان كان  
الأول يكون الوتر ا ط مساويا للوتر هـ هـ وهو خلاف الفرض وان كان الثاني يكون الوتر ا ط  
أصغر من الوتر هـ هـ وهو المطلوب

## نظريية

(٦٣) نصف القطر العمودي على وتر ينصفه وينصف قوسه أيضا (شكل ٥٦)

أعني اذا كان نصف القطر و ح عمودا على الوتر ا ب يكون

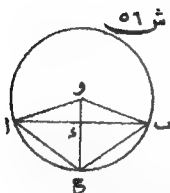
ا د = د ب ويكون القوس ا ح = القوس ح ب

وللبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين و د ب و د ا قائم الزاوية

متساويان لوجود الضلع و د مشترك بينهما وتساوي الوتر و ب

بالوتر و ا (٢٨) ومن تساويهما ينتج أن الضلع ا د = الضلع

د ب ثم اذا وصل الوتران ب ح و ح ا فالمثلثان د ب ح



و ا ح د يكونان متساويين لاستقرار الضلع د ح فيهما وتساوي الضلع د ب بالضلع د ا

كما سبق ذكره وتساوي زاوية ب د ح ب زاوية ا د ح وينتج من تساوي المثلثين أن الضلع ا ح

يساوي الضلع ح ب ومن تساويهما يكون القوس ا ح = القوس ح ب وهو المطلوب

تنبيه - يعلم مما ذكر أن المستقيم و ح متوفر فيه أربعة أمور وهي مرورها بالمرکز وبمستصف

الوتر وبمستصف القوس وكونه عمودا على الوتر وتحقيق وجود أمرين من هذه الأمور الأربعة يستلزم

تحقق الأمرين الآخرین فيقال للمستقيم العمودي على وسط وتر أنه يمر بالمرکز وبمستصف القوس

وهكذا

## نظريية

(٦٤) في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية الاوتار المتساوية أبعادها عن المركز متساوية والاوتار

المختلفة أبعادها عن المركز مختلفة وأطولها هو أقربها من المركز (شكل ٥٧)

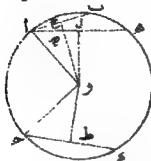
أعني اذا كان الوتر ا ب = الوتر ح د يكون العمود و ح مساويا للعمود و ط وانا كان الوتر ا هـ

أكبر من الوتر ح د يكون العمود و ل أصغر من العمود و ط



(برهان الاول) يوصل  $وا$  و  $وح$  فالثلثان القائم الزاوية  $وحا$  و  $وطح$  متساويان

لان فيهما الوتر  $وا$  = الوتر  $وح$  والضلع  $اح$  = الضلع  $حط$  (٦٢) ش ٥٧



ونبتج من تساويهما أن  $وح$  =  $وط$

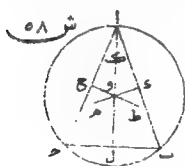
(برهان الثاني) يؤخذ الوتر  $اب$  مساويا للوتر  $ح$  ثم يقال حيث

كان  $ول$  عمودا على  $اه$  فيكون  $و$  مائلا عليه وحينئذ

يكون  $ول > و$  أو  $ول > وح$  وهو المراد  
نتيجة - يسهل البرهنة على عكس هذه القضية أي اذا تساوى بعدا وترين أو أكثر عن المركز  
تكون الاوتار متساوية واذا اختلفت أبعادها تكون مختلفة وأقصرهما ما كان بعده عن المركز أكبر

## نظرية

(٦٥) كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمكن أن يمر بهما محيط دائرة واحد لاثنان



(برهان الاول) يوصل المستقيمان  $اب$  و  $اح$  ثم يقام العمودان

$ده$  و  $حط$  على منتصبي الوترين  $اب$  و  $اح$  فينقاطعان

في نقطة و لان العمودين المقامين على مستقيمين متقاطعين

يتقاطعان (٤٩) وتكون نقطة و مركزا لمحيط دائرة يمر بالنقط

الثلاثة المفروضة لان أبعادها  $وح$  و  $وا$  و  $وب$  عن نقطة و متساوية

(برهان الثاني) يقال لو فرض امكان مرور محيط آخر بالنقط الثلاثة المفروضة فان مركزه لا بد

وأن يوجد على كلا العمودين  $ده$  و  $حط$  المقامين على وسط الوترين (٦٢)  $اب$  و  $اح$

ولما كان هذان العمودان لا يمكن أن ينة اطعا الا في نقطة واحدة يكون اذن مركز المحيط الثاني هو

عين مركز الاول وحيث ان كل واحد منهما يجب أن يمر بالنقط الثلاثة  $ا$  و  $ب$  و  $ح$  فيكون

نصف قطرهما واحدا وحينئذ فيجدان معا يصيران محيطا واحدا

(نتيجة ١) محيط الدائرتين لا يمكن أن يتقاطعا في أكثر من نقطتين لانهما لو اشتركا في ثلاث

نقط فانهما يقعدان معا يصيران محيطا واحدا

(نتيجة ٢) اذا وصل المستقيم  $ب$  و أقيم العمود  $ك$  على وسطه فانه لا بد وأن يمر بالمركز (٦٣)

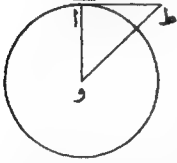
و حينئذ فالاعدة الثلاثة المقامة على أواسط أضلاع مثلث يتقاطع في نقطة واحدة تكون مركزا

لمحيط الدائرة الذي يمر برؤسه

## الفصل الثالث

( في خواص المماس وعمود المنحنى )

(٦٦) المستقيم العمودى على نهاية نصف قطر يكون مماسا لمحيط الدائرة أى لا يشترك مع المحيط الا فى نقطة واحدة وبالعكس (شكل ٥٩)



(برهان الاول) يقال لو فرض اشتراكهما فى نقطة ثانية مثل ط ووصل منها المستقيم وط لكان مائلا على ا ط ويكون وط أكبر من وا وهذا يستلزم أن تكون نقطة ط خارجة عن المحيط (برهان الثانى) يقال حيث ان ا ط لا يشترك مع المحيط الا فى

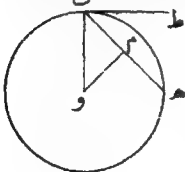
نقطة ا فكل نقطة خلافا لها مثل ط موجودة عليه تكون خارجة عن المحيط ويكون وط < وا وحيث قد البعد وا يكون أصغرا لابعاد التى يمكن مدها من نقطة و الى المستقيم ا ط فيكون عمودا على ا ط وهو المطلوب

(نتيجة ١) من أى نقطة مثل ا مفروضة على محيط الدائرة لا يمكن أن يمد الاجماس واحدة لاشراك وذلك لانه لا يمكن من النقطة المذكورة الاقامة عمود واحد ا ط على نصف القطر وا (نتيجة ٢) المستقيمان المماسان لمحيط دائرة و الممدودان من نهايتى قطر واحد يكونان متوازيين لانهم اعمودان على مستقيم واحد

(نتيجة ٣) المستقيمان المتوازيان والمماسان لمحيط دائرة يكون المستقيم المار بنقطتي تماسهما قطرا أى مارا بالمركز

## نظرية

(٦٧) مماس محيط الدائرة فى نقطة ما يمكن اعتباره كأنه نهاية لاوضاع المستقيم القاطع المار بهذه النقطة (شكل ٦٠)



أعنى ان المماس ب ط لمحيط الدائرة و فى نقطة ب يمكن اعتباره كأنه نهاية لاوضاع القاطع ب ح المار بنقطة التماس ب وللبرهنة على ذلك يقال اذا أنزل العمود وم على الوتر ح ب ثم فرض تحرك هذا الوتر حول نقطة ب بحيث تقرب نقطة ح شيئا فشيئا من نقطة ب فان العمود وم يأخذ فى الازدياد شيئا فشيئا

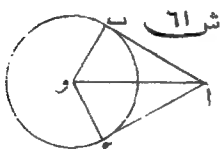
وحينئذ فعندما تتحدد نقطة  $ح$  بنقطة  $ب$  ينطبق العمود  $وم$  على  $وب$  ويتحدد الوتر بالمماس  
ويثبت المطلوب

قائمة - يمكن أن يستنتج مما ذكر تعريف عام للمماس أى ممنوع فيقال ان مماس أى ممنوع فى  
نقطة ما هو نهاية الاوضاع التى يأخذها قاطع مار بنقطة التماس يتحرك حولها بحيث تقرب نقطة  
تقاطعها الثابتة بالمحنى شيئاً فشيئاً من الاولى

### نظريـة

(٦٨) اذا مد من نقطة خارجة عن محيط دائرة مماسان له فجزأهما المحصوران بين النقطة  
المفروضة ونقطتى التماس يكونان متساويين أعنى أن

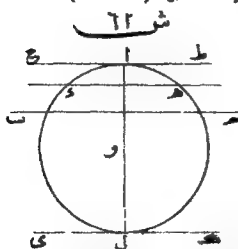
$$اب = ا ح \quad (\text{شكل } ٦١)$$



وللبرهنة على ذلك يوصل  $وب$  و  $وح$  فيكونان عمودين  
بالتساوى على  $اب$  و  $اح$  (٦٦ الثانى) ثم يوصل  $وا$   
فالتثلثان الحادئان  $ابو$  و  $ا ح و$  القاعما الزاوية  
متساويان لاشتراك الوتر  $او$  فيهما واتساوى الضلع  
 $وح$  للضلع  $وب$  وينتج من تساويهما أن  $اب = اح$  وهو المراد

### نظريـة

(٦٩) المستقيمان المتوازيان يحصران بينهما من المحيط قوسين متساويين (شكل ٦٢)



فاذا فرضنا أن المستقيمين  $ح$  و  $هـ$  متوازيان نقول  
ان القوس  $هـ ح$  = القوس  $وس$

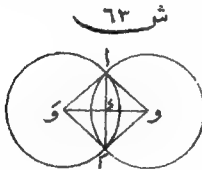
وللبرهنة على ذلك يمد من نقطة و القطر  $وا$  وعمودا  
عليهما فيحصل بمقتضى ما سبق (٦٣) أن قوس  $اح$  =  
قوس  $اب$  وأن قوس  $اه$  = قوس  $اد$  وبطرح  
التساوية الثانية من الاولى يحدث  $هـ ح = وس$

أما اذا كان أحد المتوازيين مماسا للمحيط مثل  $ح ط$  فانه  
يوصل نصف القطر  $وا$  فيصير عمودا على كلا المتوازيين ويصير القوس  $ح ا$  مساويا للقوس  $اب$

وإذا كان المستقيمان المتوازيان مماسين للحيط فإن المستقيم الواصل بين نقطتي تماسهما يكون قطرا (٦٦ نتيجة ٣) وهو يقسم محيط الدائرة الى قسمين متساويين (٦٠)  
(٧٠) عمودا للمحني في نقطة ما هو العمود على المماس المار بهذه النقطة  
وينتج من هذا التعريف أن أعمدة نقط محيط الدائرة هي أنصاف أقطاره

## الفصل الرابع (في أوضاع الدائرة) نظرية

(٧١) إذا اشترك محيطا دائرتين في نقطة خارجة عن المستقيم الواصل بين المركزين يلزم أن يشتركا في نقطة أخرى مماثلة للأولى بالنسبة لعين المستقيم الواصل بين المركزين (شكل ٦٣)



أي إذا اشترك المحيطان و و في نقطة أ الخارجة عن المستقيم و و الواصل بين المركزين يلزم أن يشتركا في نقطة أخرى مماثلة للنقطة أ بالنسبة للمستقيم و و والبرهنة على ذلك ينزل من نقطة أ العمود أ أ على و و يؤخذ البعد أ أ مساويا أ أ فتسمى نقطة أ الحادثة مماثلة للنقطة أ بالنسبة للمستقيم و و

ثم إذا واصل و أ و أ فهذان المستقيمان يكونان متساويين لانهما مائلان متساويي البعد بالنسبة لنقطة أ موقع العمود و و وحينئذ فحيط الدائرة الذي مركزه و و نصف قطره و أ يمر بنقطة أ كما أنه يمر بنقطة أ

وكذا لو واصل و أ و أ كان هذان المستقيمان متساويين أيضا ويكون محيط الدائرة الذي مركزه و و نصف قطره و أ يمر بنقطة أ وحينئذ تكون نقطة أ مشتركة بين المحيطين (نتيجة ١) إذا لم يشترك محيطا دائرتين الا في نقطة واحدة بأن كانا مماسين فإن نقطة التماس لا توجد الا على المستقيم الواصل بين المركزين وذلك لانه لو وجدت خارجة عنه لزم وجود نقطة أخرى مشتركة بين المحيطين وهو مغاير للفرص

(نتيجة ٢) إذا اشترك محيطا دائرتين في نقطتين موجودتين على المستقيم الواصل بين المركزين فانهما يتحدان معا وذلك لانهما في هذه الحالة يكونان متحدتين في القطر وحينئذ فيكون مركزهما واحدا ونصف قطرها واحدا أيضا

(نتيجة ٣) إذا اشتراك محيطا دائرتين في نقطتين احدهما على المستقيم الواصل بين المركزين والاخرى خارجة عنه فانهما يتبعان معا وذلك للزوم اشتراكهما في نقطة ثالثة مماثلة للنقطة الثانية

## نظرية

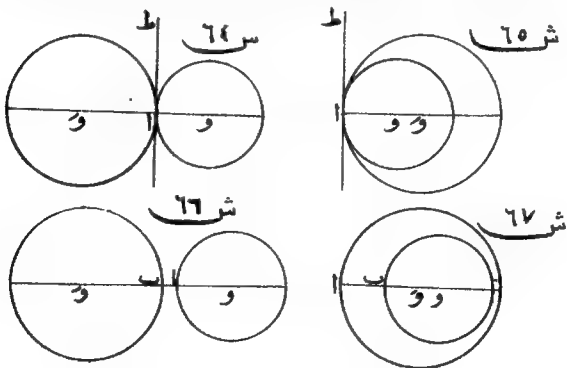
(٧٢) إذا اشتراك محيطا دائرتين في نقطتين فان المستقيم الواصل بين المركزين يكون عمودا على وسط الوتر المشترك بينهما (شكل ٦٣)

والبرهنة على ذلك يقال من المعالوم أن هاتين النقطتين لا يمكن أن تكونا على المستقيم الواصل بين المركزين (٧١ نتيجة ٢) بل تكونان خارجيتين عنه وجب أن نقطة و على هذين متساويين من نقطتي ١ و ٢ فتوجد على العمود القائم على وسط ١٢ ومثلها نقطة و وجب أن فالمتقيم و و عمود على وسط ١٢ وهو المراد

قاعدة - محيطا دائرتين الموجودان في مستو واحد لا يمكن أن يكون لهما بالنسبة لبعضهما سوى خمسة أوضاع فقط وهي

أولا - اما أن يشتركا في نقطتين ويقال لهما في هذه الحالة متقاطعتين (شكل ٦٣)  
ثانيا - اما أن يشتركا في نقطة واحدة فقط بمعنى أن يكونا متماسكين وفي هذه الحالة يكون أحد المحيطين خارجا عن الآخر أو داخله ويقال لمحيطى الدائرتين متماسكان خارجا أو داخلا (شكل ٦٤ و ٦٥)

ثالثا - اما أن لا يكون لهما نقط مشتركة وفي هذه الحالة يكون أحد المحيطين اما خارجا عن الآخر أو داخله ويقال لمحيطان متباعدان في الخارج أو في الداخل (شكل ٦٦ و ٦٧)



## نظريية

(٧٣) اذار من زايا الحرف د للبعدين مركزى محيطى دائرتين وبالمرزبين  $\alpha$  و  $\beta$  لنصفي قطريهما فانا نبرهن على الامور الاتية

أولا - اذا تابعد المحيطان فى الخارج يكون  $\alpha < \beta$  و  $\alpha + \beta$

ثانيا - اذا تماسا فى الخارج يكون  $\alpha = \beta$  و  $\alpha + \beta$

ثالثا - اذا تقاطعا يكون  $\alpha > \beta$  و  $\alpha + \beta$

رابعا - اذا تماسا فى الداخل يكون  $\alpha = \beta$  و  $\alpha - \beta$

خامسا - اذا تابعدا فى الداخل يكون  $\alpha > \beta$  و  $\alpha - \beta$

(برهان الاول) يقال من المعلوم ان البعد و  $\alpha$  الكائين بين المركزين (شكل ٦٦) مركب من نصفي القطرين  $\alpha$  و  $\beta$  ومن المسافة  $\alpha$  وحيثئذ يكون  $\alpha < \beta + \alpha$

(برهان الثانى) يقال من المعلوم ان نقطة تماس محيطى الدائرتين موجودة على المستقيم الواصل بين المركزين وحيثئذ يكون هذا المستقيم مركبا من نصفي القطرين فقط أعنى يكون  $\alpha = \beta + \alpha$  (شكل ٦٤)

(برهان الثالث) يقال من المعلوم انه متى تقاطع دائرتان فان نقطتى التقاطع تكونان خارج البعدين المركزين وحيثئذ فالثلث و  $\alpha$  يؤخذ منه ان  $\alpha > \beta + \alpha$  و  $\alpha - \beta$  (شكل ٦٣)

(برهان الرابع) يقال من المعلوم ان نقطة تماس محيطى دائرتين فى الداخل تكون على المستقيم الواصل بين المركزين وحيثئذ يكون نصف القطر الاصغر جزءا من نصف القطر الاكبر ويكون  $\alpha = \beta - \alpha$  (شكل ٦٥)

(برهان الخامس) يقال اذا تابعد محيطا دائرتين فى الداخل فان نصف القطر الاكبر يكون مركبا من البعدين المركزين ومن نصف القطر الاصغر ومن بعد آخر  $\alpha$  وحيثئذ يكون  $\alpha > \beta + \alpha$  (شكل ٦٧)

## نظريية

(٧٤) عكس هذه القضايا الخمسة حقيقى وطريقة البرهنة عليها واحدة

مثلا اذا كان البعدين المركزين أصغر من التفاضل الكائين بين نصفي القطرين يكون محيطا الدائرتين

متباعدين في الداخل وللبهنة على ذلك يقال ان لم يكونا متباعدين في الداخل لكانا اما متباعدين في الخارج أو متماسين خارجا أو داخلا أو متقاطعين وحيث ان قانون البعدين المركزيين في كل واحد من هذه الاحوال مخالف للفرض كان المحيطان متباعدين في الداخل ضرورة وهو المطلوب وعلى هذا يقاس الباقي

## الفصل الخامس

( في مقادير الزوايا )

(٧٥) قبل التكلم على مقادير الزوايا نذكر ما يأتي  
أولا - من المعلوم انه اقياس أى كمية يبحث عن نتيجة تقديرها بأخرى من نوعها معتبرة وحدة وهذه النتيجة تسمى نسبة فعلى هذا اذا أريد قياس مستقيم معلوم فانه يبحث عن النسبة الكائنة بينه وبين الوحدة التي من جنسه  
ثانيا - اذا قيل ان النسبة بين مستقيمين معلومين هي كالنسبة بين عددين صحيحين مثل ١٣ و ٧ مثلا فانه يفهم منها انحصار مستقيم ثالث ٣ مرات في أحدهما و ١٣ مرة في الثاني وان هذا المستقيم الثالث هو مقياس مشترك بين هذين المستقيمين وبناء على ذلك اذا أريد تعيين النسبة بين أى مستقيمين فانه يجب البحث عن مقياس مشترك بينهما ثم يقسم عدد مرات انحصاره في أحدهما على عدد مرات انحصاره في الثاني كما سذكره

## مسئلة

(٧٦) المطلوب إيجاد المقياس المشترك بين مستقيمين معلومين (شكل ٦٨)

ش ٦٨

اذا كان المستقيمان المعلومان هما  $AB$  و  $CD$  فانا نجري عليهما عملية مماثلة للعملية التي تحصل عند إيجاد القسمة المشتركة الاعظم بين عددين فنطبق أصغرهما  $CD$  على الأكبر  $AB$  عدد مرات صحيحة بقدر انحصاره فيه ونفرض ان عدد  $3$  هو عدد مرات الانحصار من ابتداء نقطة  $A$  الى نقطة  $H$  وان  $HB$  هو الباقي فيحصل ان

$$AB = 3CD + HB \quad (١)$$

ثم نطبق بعد ذلك الباقي هـ على المستقيم الأصغر حـ كما تقدم فنفرض ان حـ قد احتوى على الباقي هـ أربع مرات صحيحة زائد الباقي فـ فيحصل

$$ح = ٤ هـ + ف \quad (٢)$$

ثم نطبق هذا الباقي الثاني فـ على الباقي الأول هـ كما ذكر من ابتداء نقطة هـ الى نقطة ح ونفرض أنه بقى ثالث حـ فيحدث

$$هـ = ف + ح \quad (٣)$$

وأخيرا نطبق حـ على فـ ونفرض انحصاره فيه أربع مرات بدون باقى فيحدث

$$ف = ٤ ح \quad (٤)$$

ثم اذا أبدل في المتساوية (٣) فـ بمقدار من المتساوية (٤) يحدث

$$هـ = ٤ ح + ح = ٥ ح$$

فاذا أبدل الآن في المتساوية (٢) كل من هـ و فـ بمقدارهما الناتجين يحدث

$$ح = ٢٠ ح + ٤ ح = ٢٤ ح$$

وأخيرا اذا أبدل في المتساوية (١) كل من حـ و هـ بمقدارهما الاخيرين يحدث

$$أ = ٧٢ ح + ٥ ح = ٧٧ ح$$

وعلا كرينج

أولا - ان الباقي الاخير حـ هو المقياس المشترك بين المستقيمين أـ و حـ  
ثانيا - حيث كان هذا المقياس المشترك محصورا ٧٧ مرة في المستقيم الأول و ٢٤ مرة في الثاني كانت النسبة بين هذين المستقيمين المعلولين هي كالنسبة بين ٧٧ و ٢٤ وتبين على هذه الصورة  $\frac{٧٧}{٢٤}$  أو  $\frac{٢٤}{٧٧}$  فالصورة الاولى تدل على أن النسبة بين أـ و حـ هي عين النسبة بين العددين ٧٧ و ٢٤ وأما الصورة الثانية فتدل بالعكس على أن النسبة بين حـ و أـ هي عين النسبة بين العددين ٢٤ و ٧٧

تنبيه - المقياس المشترك الذى علم ليس هو المقياس المشترك الوحيد بين هذين المستقيمين بل ان جميع قواسم هذا المقياس تكون ضرورة مقاييس مشتركة لهما لضرورة انحصارها فيهما مرارا صحيحة وعلى العموم متى وجد مقياس مشترك بين خطين كان لهما مقاييس مشتركة كثيرة جدا تعلم بواسطة قسمة هذا المقياس الى أنصاف وأثلاث وأرباع وهكذا وأكبر واحد من هذه المقاييس يقال له المقياس المشترك الاعظم

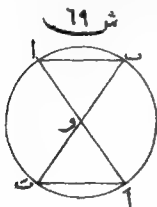


(٧٧) كل خطين مستقيمين يوجد لهما مقياس مشترك يقال لهما مستقيمان متناسبان وكل مستقيمين لم يكن بينهما مقياس مشترك يقال لهما غير متناسبين الا انه كلما ظهر باق وطبق على الباقي الذي قبله مرارا فانه لا بد وأن يتوصل من توالي العمل الى باق صغير جدا غير محسوس بحيث يمكن اعتباره كاشئ وبناء عليه فيمكن اعتبار أي مستقيمين كانهما متناسبان دائماً أعني أنه يوجد بينهما مقياس مشترك سواء كان هذا المقياس حقيقياً أو تقريبياً

(٧٨) حيث ان أي قوسين من دائرة واحدة أو من دوائر متساوية يمكن انطباقهما على بعضهما فبناء عليه يمكن اجراء ما قيل في المقياس المشترك بين مستقيمين على أي قوسين من دائرة واحدة أو من دوائر متساوية واذن فكل قوسين من هذا القبيل يمكن أن يوجد بينهما دائماً مقياس مشترك اما حقيقى أو تقريبى

## نظريـة

(٧٩) في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية الاقواس المتساوية تكون زواياها المركزية متساوية وبالعكس أي اذا كانت الزوايا المركزية متساوية تكون أقواسها كذلك (شكل ٦٩)



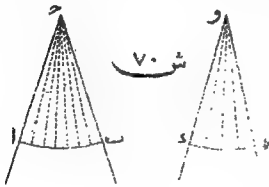
أعني اذا كان القوس ا ب = القوس ا ت تكون زاوية ا و ب تساوى زاوية ا و ت وكذا اذا كانت الزاوية المركزية ا و ب تساوى الزاوية المركزية الاخرى ا و ت يكون قوس ا ب = قوس ا ت

(برهان الاول) يوصل الوتران ا ب و ا ت فمن حيث ان القوسين ا ب و ا ت متساويان يكون وتراهما كذلك وحيث ان الزاويتان ا و ب و ا و ت يكونان متساويتين لتساوى الاضلاع الثلاثة المتناظرة فهما وينتج من تساويهما أن زاوية ا و ب = زاوية ا و ت وهو المراد

(برهان الثاني) يقال ان المثلثين ا و ب و ا و ت متساويان لتساوى ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من أحدهما النظائرهما من الثاني وينتج من تساويهما أن الضلع ا ب = الضلع ا ت وحيث كان هذان الوتران متساويين يكون قوساهما كذلك أعني أن القوس ا ب = القوس ا ت وهو المطلوب

## تظريية

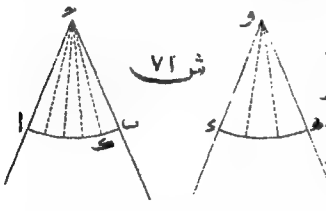
(٨٠) في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية النسبة بين أي زاويتين مركبتين هي دائما كالنسبة



بين قوسيهما الواقعين بين ضلعيهما (شكل ٧٠) لكن ا ح ب و د ه زاويتين مركبتين في دائرتين متساويتين ولنفرض أولا وجود مقياس مشترك بين قوسيهما ا ب و د ه وأنه منحصر ٧ مرات في القوس ا ب و ٤ مرات في القوس د ه وحينئذ تكون النسبة بين هذين القوسين هي  $\frac{٧}{٤}$  (نتيجة ٢) فإذا

وصل الآن جميع نقط تقاسيم كل قوس بمركز دائرة بمستقيمات يشاهد أن الزاوية ا ح ب انقسمت الى سبع زوايا مركزية متساوية لتساوي أقواسها (٧٩) المحصورة بين أضلاعها وأن الزاوية د ه انقسمت الى أربع زوايا مركزية متساوية وتكون النسبة بين الزاويتين هي  $\frac{٧}{٤}$  وهي عين النسبة الكائنة بين القوسين

فإذا لم يوجد بين القوسين مقياس مشترك بأن كانا غير متناسعين يقسم القوس د ه الى ثلاثة أقسام متساوية (شكل ٧١)



ثم نفرض أن القوس ا ب يشتمل على أربعة من هذه الأقسام وعلى الجزء ب ك الاصغر من أي واحد من هذه الأقسام فتكون النسبة بين القوسين ا ب و د ه أكبر من  $\frac{٤}{٣}$  وأصغر من  $\frac{٥}{٣}$

ثم اذا وصل بين المركزين ح و و بين نقط التقاسيم بمستقيمات يشاهد أن الزاوية د ه انقسمت الى ثلاث زوايا مركزية متساوية وأن الزاوية ا ح ب تشتمل على أربع من هذه الزوايا وعلى الزاوية ك ح ب الاصغر من أي واحدة منها وحينئذ تكون النسبة بين الزاويتين محصورة بين الكسرين  $\frac{٤}{٣}$  و  $\frac{٥}{٣}$  وباعلمية تكون القسبان  $\frac{٤}{٣}$  و  $\frac{٥}{٣}$  محصورين بين الكسرين  $\frac{٤}{٣}$  و  $\frac{٥}{٣}$

لكنه اذا قسم القوس د ه الى عشرة أقسام أو مائة جزء أو ألف جزء أو ... الخ متساوية

فانه يبرهن كما سبق بأن النسبتين السابقتين محصورتين بين عددين متوالين من أجزاء العشرات  
أومن أجزاء المئين أومن أجزاء الألوف أو الخ . وحينئذ فتكون هاتان النسبتان متساويتين حيث  
انه قد شوهد أنهما محصوران دائماً بين عددين يمكن أن يؤول الفرق بينهما الى كية صغيرة جداً على  
قدر ما يراد

وينتج مما ذكرناه اذا أريد ايجاد النسبة بين زاويتين فانه يستعوض ذلك بالبحث عن النسبة بين  
قوسيهما المحصورين بين أضلاعهما باعتبار رأسهما مركزين لهما . وحينئذ اذا اعتبر أحدا لقوسين  
وحدة للاقواس وزاويته وحدة للزاويا كانت الزاوية الاخرى مشتملة على وحدة الزوايا بقدر اشتغال  
قوسها على وحدة الاقواس ولذا يقال على وجه العموم ان الزاوية تقاس بقوسها المحصور بين ضلعيها  
الذي مركزه رأسها

(٨١) وقد اتفقوا على جعل الزاوية القائمة وحدة للزوايا لكون مقدارها ثابتاً وعلى اعتبار قوسها  
وهو ربع المحيط الذي مركزه رأسها وحدة للاقواس بحيث لو أريد تقدير أى زاوية فانه يقدر قوسها  
بربع المحيط

والطريقة الآتية المبينة على تقسيم المحيط هي المستعملة في التقدير

فيقسم محيط الدائرة الى ٣٦٠ جزءاً متساوية تسمى درجاً وتنقسم الدرجة الى ٦٠ دقيقة  
والدقيقة الى ٦٠ ثانية وهكذا . وحينئذ فتقدر الزاوية بمقدار الدرج والدقائق والثواني المشتمل  
عليه قوسها ولا فرق في نسبة عدد الدرج والدقائق والثواني وهكذا للاقوس والزاوية فيقال ان  
قوس كذا أو زاوية كذا اشتمل مثلاً على عشر درجات وخمس عشرة دقيقة وسبع ثوان ولاجل  
الاختصار في الكتابة يرمز بهذه العلامة ( ° ) لبيان الدرجة وبهذه ( ' ) لبيان الدقيقة  
وبهذه ( " ) لبيان الثانية وهكذا

فالزاوية أو القوس الذي مقداره ١٥ درجة و ٢٧ دقيقة و ١٩ ثانية يكتب هكذا ١٥° ٢٧' ١٩"  
والاعمال التي تقدمت في علم الحساب على الاعداد المنسبة يجري تطبيقها هنا على الدرج  
والدقائق والثواني بدون فرق ولنتل ذلك فنقول

أولاً - المطلوب تعيين مقدار الزاوية الثالثة من مثلث اذا علم زاويته الاخرى ان احدهما  
تساوى ١٩° ٣٥' ٦٠" والثانية تساوى ٤٧° ٥٣' ٨٠" يقال حيث كان مجموع زوايا المثلث مساوياً  
ثلاثين أو ١٨٠° كان مقدار الزاوية المطلوبة يتعين بواسطة طرح مجموع الزاويتين المعولتين  
من ١٨٠° هكذا

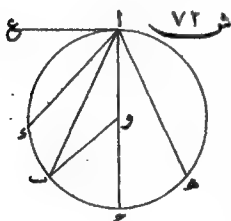
$$١٨٠ - [(٨٠° ٥٣' ٤٧) + (٦٠° ٣٥' ١٩)] = ١٨٠ - ١٤١° ١٩' ٦ = ٣٨° ٤٠' ٥٤$$

ثانياً - المطلوب حساب الدرج الموجود في زوايا شكل كثير الاضلاع عدد أضلاعه ٢٥  
لأنه يقال ان عدد الزوايا القائمة الموجودة في هذا الشكل مساو الى  $(20 - 2) \times 90 = 1620$   
وبضرب هذا العدد في ٩٠ يحدث ١٤٠

وتوجد طريقة أخرى جديدة اعشارية في تقسيم محيط الدائرة خلاف الطريقة السابقة وهي  
تقسيمه الى ٤٠٠ جزء متساوية يسمى واحدها غرانة والغرانة تنقسم الى ١٠٠ دقيقة.  
والدقيقة الى ١٠٠ ثانية وهكذا وهذه الطريقة وان كان يسهل الحساب بواسطتها لكن  
لا زال استعمال الطريقة القديمة جارياً وهو الذي تتبعه هنا

## نظريّة

(٨٢) معيار الزاوية المحيطية هو نصف القوس المحصور بين ضلعها (شكل ٧٢)



ولهذه الزاوية بجملة أوضاع  
(الوضع الاول) أن يمر أحد ضلعها بالمركز مثل زاوية ب ا ح  
فاذا وصل نصف القطر ب و تكون الزاوية ب و ح  
الخارجية عن المثلث ب و ا مساوية الى و ا + و ب  
وحيث ان هاتين الزاويتين متساويتان لان المثلث المذكور  
متساوي الساقين تكون زاوية ب و ح = ٢ ب ا ح  
ولما كانت زاوية ب و ح مركزية وتقاس بالقوس ب ح  
فتكون زاوية ب ا و التي هي نصفها تقاس بنصف القوس ب ح

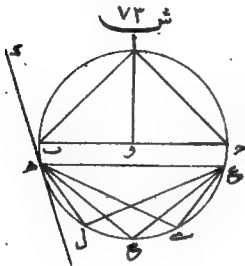
(الوضع الثاني) أن يكون المركز بين الضلعين مثل زاوية ب ا ه وفي هذه الحالة تكون زاوية  
ب ا ه = ب ا ح + ح ا ه وحيث ان كل واحدة من هاتين الزاويتين تقاس بنصف القوس  
المحصورين ضلعها كانت زاوية ب ا ه تقاس بنصف مجموع القوسين المذكورين أو بنصف  
القوس ب ه المحصورين ضلعها

(الوضع الثالث) أن يكون المركز خارجاً عن انفرج الزاوية مثل زاوية ب ا د وفي هذه الحالة  
تكون هذه الزاوية هي الفرق بين الزاويتين ب ا د و ح ا ب وتقاس حينئذ بنصف القوس  
ب د وهو الفرق بين القوسين د ح و ح ب

(الوضع الرابع) أن يكون أحد ضلعي الزاوية مماساً للمحيط مثل الزاوية ه ا ع فان معيارها

لا يزال مساويا لنصف القوس  $ا هـ$  وذلك لأنه اذا فرض أن الزاوية المفروضة هي زاوية  $هـ ا$  ثم فرض أن الضلع  $هـ ا$  ثابت وأن الضلع  $ا د$  متحرك حول نقطة  $ا$  بحيث تقرب نقطة  $د$  شيئا فشيئا من نقطة  $ا$  فان جميع الزوايا المتوالية الحادثة تقاس بالنصف الاقواس المحصورة بين أضلاعها وبالجملة فنعد ما تصل نقطة  $د$  الى نقطة  $ا$  يكون معيار الزاوية  $هـ ا$  مساويا لنصف القوس  $ا هـ$

وينتج من ذلك (شكل ٧٣)



أولا - ان الزوايا  $هـ ا د$  و  $هـ د ع$  و  $هـ ع و$  و  $هـ ع و$  التي رؤسها على المحيط وأضلاعها واصله الى نهايتي قوس واحد تكون كلها متساوية لاشتراكها في معيار واحد وهو نصف القوس  $هـ ا$

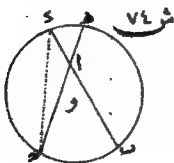
ويمكن التعبير عن هذه النتيجة بطريقة مختصرة فيقال ان جميع الزوايا المرسومة في قطعة واحدة كلها متساوية

ثانيا - ان الزاوية  $ب ا د$  التي رؤسها بالمحيط وضلعها  $ا د$  و  $ا ب$  واصلان الى نهايتي القطر  $ا ب$  هي زاوية قائمة لان معيارها نصف القوس المحصور بين ضلعها وحيث كان القوس مساويا لنصف محيط فيكون معيارها مساويا لربع محيط وحيث ان ذلك زاوية مرسومة في قطعة مساوية لنصف الدائرة تكون زاوية قائمة

ثالثا - ان الزاويتين المتقابلتين في أي شكل رباعي مرسوم داخل الدائرة متكاملتان لان مجموع معياريهما مساو لنصف محيط

## نظريّة

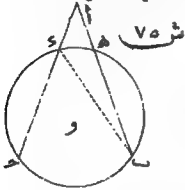
(٨٣) معيار الزاوية الداخلة أي التي رؤسها بين المحيط والمركز يساوي نصف مجموع القوسين المحصور أحدهما بين ضلعها والثاني بين امتدادهما أعني أن زاوية  $ا ب د = ا هـ + ب هـ$  (شكل ٧٤)



وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيم  $د$  فالزاوية  $ب ا د$  الخارجة عن الثلث  $ا د هـ = ا د + د هـ = ا هـ + ب هـ$  وهو المطلوب

## نظريية

(٨٤) الزاوية الخارجة أى التى رأسها خارج المحيط تقاس بنصف الفرق بين القوسين المحصورين



بين ضلعها (شكل ٧٥)

$$\text{أعنى أن زاوية } ا ب هـ = \frac{ب - س}{٢}$$

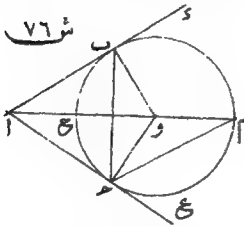
وللبرهنة على ذلك يقال اذا وصل المستقيم ب س حدث أن

$$\text{زاوية } ب س د = ب + ا \text{ أو } ا = ب - د = ب - ا - د \text{ أو زاوية}$$

$$\frac{ب}{٢} = \frac{س}{٢} = \frac{هـ}{٢} = \frac{ب - س}{٢} \text{ وهو المراد}$$

نتيجة - اذا كان أحد ضلعى الزاوية الخارجة أو كلاهما مماسا للمحيط فان معيار الزاوية

لا يزال مساويا لنصف الفرق بين القوسين المحصورين بين ضلعها (شكل ٧٦)



$$\text{فالزاوية } ع ا م = \frac{ع - س}{٢}$$

لانه اذا وصل م حدث

$$\frac{ع}{٢} = \frac{م}{٢} + ا \text{ أو } ا = \frac{ع}{٢} - \frac{م}{٢}$$

$$\text{أو } ا = \frac{ع}{٢} - \frac{س}{٢} = \frac{ع - س}{٢}$$

$$\text{والزاوية } د ا ع = \frac{د - ب}{٢}$$

وذلك لانه اذا وصل ب حدث أن

$$\frac{د}{٢} = \frac{ب}{٢} + ا \text{ أو } ا = \frac{د}{٢} - \frac{ب}{٢} = \frac{د - ب}{٢} = \frac{ع - س}{٢}$$

فائدة - بالنأمل فى (الشكل ٧٦) يعلم أن الزاويتين د س و ع ح متساويتان

لتساويهما فى المعيار وحينئذ تكون الزاويتان ا ب ح و ا ح ب متساويتين ويكون المثلث

ا ب ح متساوى الساقين والعمود النازل من رأسه على قاعدته يميز طبعاً وسطها وبناء عليه فانه لابد

وأن يميز بالمركز ومن ذلك تنتج هذا القاعدة وهى

كل زاوية مرسومة خارج الدائرة وضلعاهامماسان لمحيطها فان جزأيهما المحصورين بين نقطتى

التماس ورأسهما متساويان وأن المستقيم المنصف لهما يميز بمركز الدائرة ويكون عموداً على وسط الوتر

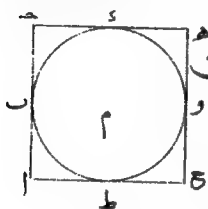
الواصل بين نقطتى التماس

(نتيجة ١) كل نقطة مثل ا خارج محيط الدائرة و يمكن أن يعمتها مماسان له متساويان

وذلك لانه اذا فرض أن ا ب مماس لمحيط الدائرة ووصل نصف القطر و ب كان ضرورة عموداً

على المماس ثم اذا تصورنا تدوير نصف المحيط الاعلى حول القطر م ح فان نقطة ب تنطبق طبعاً على نقطة ح و يأخذ المماس اب الوضع ا ح وأما نصف القطر و ب فانه يبقى دائماً عمودياً على اب في أثناء الدوران و يأخذ الوضع و ح العمودى على ا ح وبذلك يكون ا ح مماساً آخر وهو مساو اب كما تقدم

(نتيجة ٢) مجموع أى ضلعين متقابلين من أى شكل رباعى مرسوم على الدائرة يساوى مجموع الضلعين الآخرين منه (شكل ٧٧) أعنى يكون



$$ا ح + ه ح = ا ب + ح د$$

وذلك لان

$$ا ب = ا ط \text{ و } ح د = ح و \text{ و } س ح = س و$$

$$\text{و } و ح = ح ط$$

وبجمع هذه المتساويات على بعضها يحدث

$$ا ب + ح د + ح و + و ح = ا ط + ح و + س ح + ح ط$$

$$\text{أو } ا ح + ه ح = ا ب + ح د \text{ وهو المطلوب}$$

## الفصل السادس

( في الدعاوى العملية )

(٨٥) الغرض من حل أى مسئله عملية بواسطة المسطرة والبرجل بيان توالى الاعمال التى تجرى بواسطة رسم الخطوط والدوائر ليعقبها حل المسئلة المفروضة والسبب العام الذى يجب اتباعه فى ذلك هو

أولاً - أن يفرض أن المسئلة محاولة ويرسم الحل المطلوب

ثانياً - أن يبحث عن النقط التى تكفى معرفتها لاتمام الحل مع السهولة ونعتبر أنها مجهولة يطلب تعيينها ونجتهد دائماً فى تقليل عددها على قدر الامكان حتى انها تجعل واحدة فقط ان أمكن ذلك

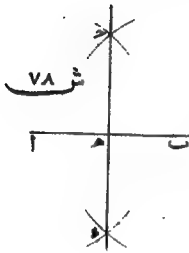
ثالثاً - أن يبحث فى أن يبرهن بناء على معالم المنطوق أو فروضه بأن كل واحدة من هذه النقط المجهولة امام وجوده على خطين مستقيمين معلومين يتأتى رسمهما واما على مستقيم ومحيط دائرة كذلك أو على محيطى دائرتين أيضاً

رابعا - أن يبحث في ترجيع تعيين النقط المجهولة الى حلول مسائل تقدمت  
ولابد أن يحل بعض مسائل بسيطة يتوصل بها الى حل مقدار عظيم من المسائل الأخر فنقول

## في رسم الخطوط المتعامدة

### دعوى عملية

(٨٦) طريقة أقامة عمود على مستقيم معلوم يمر بوسطه (شكل ٧٨)



يفرض لذلك أن المسئلة تحلولة وأن  $\angle د هـ$  هو العمود  
المطلوب ثم يقال من المعلوم أن أي نقطتين مثل  $\angle و د$   
كافيتان لتعيينه وحيث أنه محل هندسي للنقط المتساوية  
البعدين النقطتين  $ا و ب$  فكل نقطة مثل  $\angle د$  توجد  
في تقاطع محيطي الدائرتين المتساويتين اللتين مركزاهما  
 $ا و ب$  ومثلها نقطة  $د$  ولما كان من اللزوم تقاطع  
محيطي الدائرتين فيكون

$$اب > اد + د ب \text{ أو } اب < اد + د ب \text{ أو } اب = اد + د ب$$

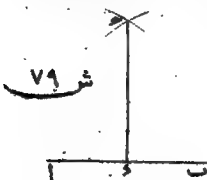
ومن ذلك تنتج طريقة الحل وهي

يجعل نهايتا المستقيم المعلوم مركزين ونصف قطراً كبير من نصفه يرسم محيطا دائرتين متقاطعتان  
فالوتر المشترك بينهما يكون هو العمود المطلوب

نتيجة - يمكن استعمال عين هذه الاعمال فيما اذا أريد تصنيف مستقيم معلوم

### دعوى عملية

(٨٧) طريقة مدم مستقيم عمودى على آخره معلوم من نقطة مفروضة - والنقطة عتة أو ضاع



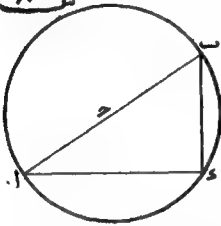
الأول - اذا كانت النقطة  $د$  العلامة موجودة على  
المستقيم  $اب$  (شكل ٧٩) وفرض أن المسئلة تحلولة  
وأن  $\angle د$  هو العمود المطلوب يلزم أن نبحت عن تعيين  
نقطة أخرى من نقط العمود المطلوب ولتكن  $\angle د$  مثلا



والوصول الى ذلك يقال لأخذ البعدان  $د$  و  $ب$  بجائى نقطة  $د$  بحيث يكونان متساويين لوجدت نقطة  $ح$  المطلوبة على بعدين متساويين من هاتين النقطتين وبناء عليه فتوجد في تقاطع محيطى الدائرتين المتساويين اللتين مركزاهما  $ا$  و  $ب$  بنصف قطر كافى لتقاطعهما ومن ذلك نتج طريقة الحل الآتية وهى  
يؤخذ بجائى نقطة  $د$  بعدان متساويان  $د$  و  $ب$  ثم تجعل كل واحد من النقطتين  $ا$  و  $ب$  مركزا ونصف قطرا أكبر من  $ا$  يرسم قوسان من محيطى دائرتين فيتقاطعان في نقطة مثل  $ح$  ثم يوصل  $ح$  و  $د$  فيكون هو العمود المطلوب

الثانى - اذا وجدت نقطة  $د$  على نهاية مستقيم لا يمكن مله (شكل ٨٠)

شكل ٨٠

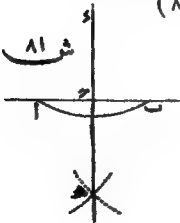


ففى هذا الحالة لا يمكن اجراء الاعمال السابقة لكنه اذا فرض أن المسألة محلولة وأن  $ب$  و  $د$  هو المستقيم العمود على  $ا$  و  $د$  لزم البحث عن نقطة من نقط هذا العمود ولكن نقطة  $ب$  ولذلك يقال من المعلوم أنه لو كانت نقطة  $ب$  معلومة ووصل منها الى نقطة  $ا$  احدى نقط المستقيم  $ا$  فانه يتكون من هذا المستقيم الموصول ومن المستقيم المعلوم ومن العمود المطلوب مثلث قائم الزاوية فى  $د$  وحينئذ اذا

اعتبر المستقيم  $ا$  ب قطرا ورسم عليه محيط دائرة فانه يبر ضرورة نقطة  $د$  وذلك لان زاوية  $ا$  كانت قائمة ومعيارها ربع محيط فلا بد أن يكون رأسها على المحيط وبما ذكر تستنتج قاعدة الحل هذه تؤخذ نقطة ما اختيارية مثل  $ح$  خارج المستقيم  $ا$  و  $د$  ثم تجعل مركزا ونصف قطر مساو  $ح$  و  $د$  يرسم محيط دائرة يقطع  $ا$  و  $د$  فى نقطة  $ا$  فاذا وصل  $ا$  و  $د$  على استقامته حتى يقطع محيط الدائرة فى نقطة  $ب$  تكون هى نقطة ثانية من العمود ويكون  $ب$  و  $د$  هو العمود المطلوب

الثالث - اذا فرضت نقطة  $د$  خارج المستقيم  $ا$  ب (شكل ٨١)

شكل ٨١



وأن  $د$  و  $هـ$  هو العمود المطلوب  
فلتعيين نقطة أخرى من نقط العمود مثل نقطة  $هـ$  تجعل نقطة  $د$  مركزا ونصف قطرا يرسم قوس محيط دائرة بحيث يقطع المستقيم المعلوم فى نقطتين مثل  $ا$  و  $ب$  وحينئذ تكون نقطة  $هـ$  المطلوب تعيينها موجودة على بعدين متساويين من نقطتي  $ا$  و  $ب$  وتعين إذن

كأن تقدم بتقاطع قوسى محيطى دائرتين متساويتين من رسمتين بالنقطتين  $أ$  و  $ب$  ومن ذلك تخرج طريقة الحل هذه

تجعل نقطة  $د$  مركزاً ونصف قطر كاف يرسم قوس محيط دائرة يقطع المستقيم المعلوم فى نقطتين مثل  $أ$  و  $ب$  ثم تجعل كل واحدة من هاتين النقطتين مركزاً ونصف قطر أكبر من نصف  $أب$  يرسم قوسان من محيطى دائرتين فيقطعان فى نقطة مثل  $هـ$  ويكون  $د هـ$  هو العمود المطلوب

## فى رسم الزوايا

### دعوى علمية

(٨٨) طريقة مد مستقيم يصنع مع آخر معلوم من نقطة مفروضة عليه زاوية تساوى زاوية معلومة (شكل ٨٢)



لتكن  $د$  هى الزاوية المعلومه و  $أ$  هى النقطة المفروضة على المستقيم  $د$  فنفرض أن المسألة محاولة وأن المستقيم  $أهـ$  هو المستقيم المطلوب فيحتاج الامر حينئذ الى تعيين نقطة أخرى من هذا المستقيم مثل نقطة  $هـ$  . وللوصول الى ذلك يقال

إذا جعل كل واحدة من النقطتين  $أ$  و  $د$  مركزاً وبعدها اختيارى رسم قوساً محيطى دائرتين متساويتين فمن حيث ان الزاويتين  $أ$  و  $د$  يجب أن تكونا متساويتين وهما مركزيتان فى دائرتين متساويتين فيكون قوساهما متساويين ووترهما كذلك وحينئذ فنوجد نقطة  $هـ$  فى تقاطع القوس  $د هـ$  بحيط الدائرة الذى مركزه  $د$  ونصف قطره مساو للوتر  $د هـ$  ومن ذلك تخرج طريقة الحل هذه

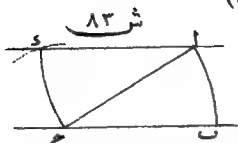
تجعل نقطة  $د$  مركزاً ونصف قطر اختيارى يرسم القوس  $د هـ$  ثم تجعل نقطة  $أ$  مركزاً وبعين نصف القطر المذكور يرسم قوس غير محدود ثم تجعل نقطة  $د$  مركزاً ونصف قطر مساو للوتر  $د هـ$  يرسم قوس آخر من محيط دائرة يقطع القوس  $د هـ$  فى نقطة  $هـ$  فاذا وصل  $هـ أ$  تكون زاوية  $هـ أ د$  هى الزاوية المطلوبة

## في رسم الخطوط المتوازية

### دعوى عملية

(٨٩) طريقة من مستقيم موازى آخر معلوم من نقطة ما خارجة عنه

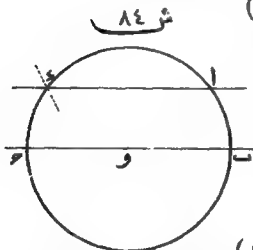
الحل الاول (شكل ٨٣)



إذا كانت  $ا$  هي النقطة المعلومة وكان  $ب$  هو المستقيم  
المعلوم وفرضنا ان المسألة محلولة وأن  $ا$  هو المستقيم  
الموازى المطلوب لرسمنا تعيين نقطة أخرى مثل  $س$  من  
المستقيم الموازى المذكور

والوصول الى ذلك يقال اذا وصل بين نقطة  $ا$  المقروضة وبين احدى نقط المستقيم المعلوم  
ولتكن  $ب$  كانت زاوية  $ا$  ب مساوية لزاوية  $ا$  ب لكونهما متبادلتين داخليتين وحينئذ  
فقد رجع الامر الى رسم زاوية  $ا$  ب مساوية لزاوية  $ا$  ب كما هو في فقرة ٨٨

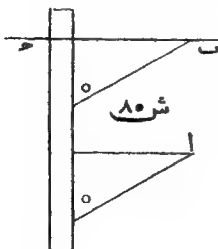
الحل الثاني (شكل ٨٤)



اذا فرض أن المسألة محلولة وأن  $ا$  هو المستقيم الموازى  
المطلوب ثم رسم محيط دائرة مارا بنقطة  $ا$  وقاطعا  
للمستقيم  $ب$  فنحن حيث ان القوس  $ب$  د يجب أن  
يكون مساويا للقوس  $ا$  ب فيكون وترهما كذلك  
وحينئذ فتتعين نقطة  $س$  بتقاطع المحيط الاول بمحيط آخر  
مركزه نقطة  $و$  ونصف قطره مساو لوتر القوس  $ا$  ب

الحل الثالث (شكل ٨٥)

يستعمل أحيانا الحل هذه المسئلة المثلث الخشبي وهو قطعة من الخشب الرقيق على هيئة مثلث  
احدى زواياه قائمة بواسطة انزلاقه على مسطرة بان يطبق أحد ضلعي القائمة من المثلث المذكور

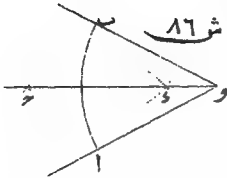


على المستقيم المعلوم وتطبق حافة المسطرة على الضلع الثاني  
للزواية القائمة ثم تثبت المسطرة بالدوير لئلا يزل المثلث على حافتها  
حتى يميز الضلع الذى كان منطبقا على الضلع  $ب$  د بالنقطة  $ا$   
فانارسم مستقيم بطول حافة هذا الضلع كان موازيا  
للمستقيم  $ب$  د لان الزوايا المتناظرة الحادثة من المستقيمين  
المذكورين ومن حافة المسطرة متساوية لكونها قائمة

## في تنصيف زاوية أو قوس معلوم

### دعوى عملية

(٩٠) طريقة تنصيف زاوية أو قوس معلوم (شكل ٨٦)



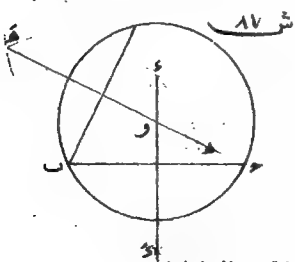
أولاً - إذا فرض أن  $أوب$  هي الزاوية المعلومة وأن المسئلة محولة وأن  $دز$  هو المستقيم المنصف لها فإذا أردتعيين نقطة أخرى من المستقيم المنصف يقال إذا جعلت نقطة  $و$  مركزاً ورسم قوس بنصف قطر اختياري فإنه يقطع

الضلعين  $أو$  و  $وب$  في نقطتين ويكون المستقيم المنصف ما ضرورية بمقتضى القوس  $أب$  المحصور بين ضلعي الزاوية وعموداً على منتصف الوتر  $أب$  وحينئذ لتعيين نقطة  $ح$  من المستقيم المنصف يجري العمل كما أجرى في غرة ٨٦

ثانياً - إذا فرض أن  $أب$  قوس معلوم يراد تنصيفه يقال إذا تصورنا وجود وتره  $فان$  العمود المقام على منتصفه يمر بمنتصف القوس أيضاً وحينئذ فقد رجع الامر الى اجراء اعمال غرة ٨٦ (٩١) لما كان يطلب أحياً نارسم محيط دائرة يمر بثلاث نقط معلومة ليست على استقامة واحدة وأنعين مركز محيط دائرة أو قوس معلوم ناسب ذكر العملية الآتية

### دعوى عملية

(٩٢) طريقة امرار محيط دائرة ثلاث نقط معلومة ليست على استقامة واحدة (شكل ٨٧)



إذا كانت النقط الثلاثة هي  $أوب$  و  $ح$  وفرض  $ش ٨٧$  أن المسئلة محولة وأن  $أب$  هو محيط الدائرة المطلوب ان المبحث عن المركز و

والوصول الى ذلك يقال ان المركز المذكور يوجد على العمود القائم على وسط الوتر  $أب$  (٦٣ تنبيه) وكذا يوجد على العمود القائم على وسط الوتر  $ب$  ولما كان هذان العمودان لا بد أن يتقاطعا (٤٩)

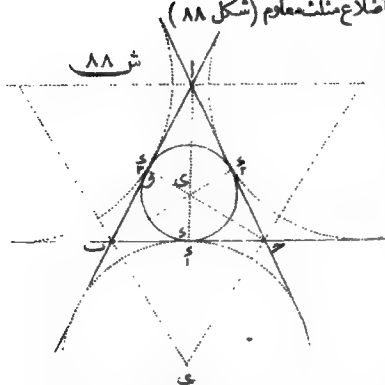
فبناء عليه يرجع الامر الى اجراء اعمال غرة ٨٦ مرتين ليتوصل الى المطلوب

نتيجة - إذا أريد تعيين مركز محيط دائرة معلوم أو مركز قوس معلوم يؤخذ عليه ثلاث نقط ويجرى الأعمال السابقة

## في رسم المستقيمات المماسية لمحيطات الدوائر

### دعوى عملية

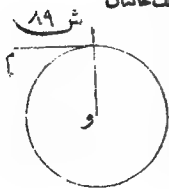
(٩٣) طريقة رسم محيط دائرة بمس أضلاع مثلث معلوم (شكل ٨٨)



ليكن  $ABC$  هو المثلث المعلوم فإذا  
فرض أن المسئلة محلولة وأن نقطة  
 $O$  هي مركز محيط الدائرة الذي بمس  
أضلاع المثلث فنحن نثبت أن المركز  
المذكور يجب أن يكون على بعضين  
متساويين من الضلعين  $AB$  و  $AC$   
فيوجد ضرورة على المستقيم المنصف  
لزواية  $A$  ولهذا السبب أيضا يوجد  
على المستقيم المنصف لزواية  $B$   
وإنه فهو موجود في نقطة تلاقيهما  
ثم إذا نصف الزوايا الخارجة من المثلث فإنه يتوصل إلى محيطات دوائر أخرى مماسة لامتدادات  
أضلاع المثلث الثلاثة

### دعوى عملية

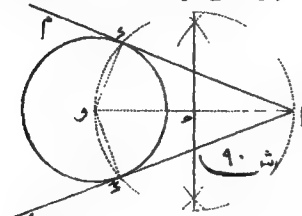
(٩٤) طريقة رسم مستقيم مماس لمحيط دائرة من نقطة معلومة وإن كانت حالتان



الحالة الأولى - إذا كانت النقطة المعلوم  $A$  موجودة على  
محيط الدائرة (شكل ٨٩) فنحن نثبت أن المماس الذي يمر بنقطة  $A$   
يجب أن يكون عمودا على نصف القطر المار بهذه النقطة التي هي  
نقطة التماس فقد آلت المسئلة إلى الحالة الثانية من طريقة أقامة

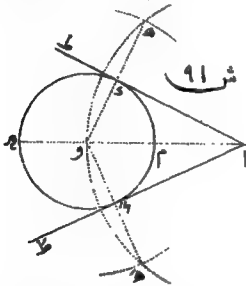
عمود على مستقيم من نقطة مفروضة فترة ٨٧

الحالة الثانية - إذا كانت النقطة أ المعلومة موجودة خارج المحيط وفرض أن المسألة محسولة



وان و هي نقطة التماس المجهولة (شكل ٩٠) أي التي يجب البحث عنها يقال حيث أن زاوية أ و يجب أن تكون قائمة فتكون مرسومة في نصف محيط قطره أ و حينئذ إذا رسم محيط دائرة على أ و فان نقطة و توجد في تقاطع هذا المحيط بمحيط الدائرة المعلومة

حل ثان - إذا كانت أ هي النقطة المفروضة (شكل ٩١) وان أ و هو التماس



المطلوب وإريد تعيين نقطة التماس و يحد نصف القطر و و بمقدار و = و و حينئذ معرفة نقطة ه تكفي لمعرفة نقطة و غير أن نقطة ه توجد على محيط الدائرة الذي مركزه و ونصف قطره مساو م و كذا توجد على محيط الدائرة الذي مركزه أ ونصف قطره أ و كلاً يخفى وبناء عليه فتوجد في تقاطعهما

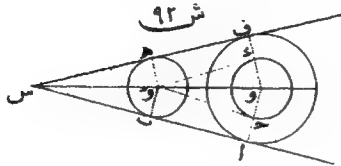
تنبيه - عندما تكون نقطة أ خارجة عن المحيط فانه يشاهد مع السهولة أولاً وتفر شروط تقاطع محيطي الدائرتين لأن البعدين المركزين في كلا الشكلين ٩٠ و ٩١ هو أحد نصفي القطرين فيكون ضرورة أصغر من مجموعهما وأكبر من فاصلهما وثانياً وجود مماسين في كل واحد من الحالتين

## دعوى عملية

(٩٥) طريقة تماس محيطي دائرتين لذلك حالتان

الحالة الأولى - أن يكون التماس من الخارج (شكل ٩٢) فإذا كان و و محيطي الدائرتين المراد تماس لهما من الخارج وفرض أن المسألة محسولة وأن أ ب هو التماس المطلوب كان النقطتان أ و ب هما المقتضى تعيينهما

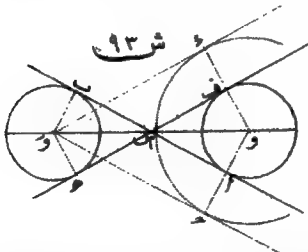
فاذا وصل  $وا$  و  $و$  ب و  $و$  مدمن نقطة  $و$  المستقيم  $و$  موازيا للمستقيم  $اب$  حتى يقابل المستقيم  $او$  في نقطة  $ح$  كلتا تعين نقطة  $ح$  كفا لتعين النقطتين  $ا$  و  $ب$  وذلك لانه اذا وصل  $و$  ممد على استقامته فانها



تعين نقطة  $ا$  وكذا حيث ان كلا من  $وا$  و  $و$  عمود على  $و$  فيكونان متوازيين فاذا مده حينئذ من نقطة  $و$  المستقيم  $و$  موازيا الى  $وا$  فانها تعين أيضا نقطة  $ب$

وللوصول الى تعين نقطة  $ح$  يقال اذا جعلت نقطة  $و$  مركزا ونصف قطر يساوى  $وا$  -  $و$  رسم محيط دائرة فانه يكون مماسا للمستقيم  $و$  العمودى على نصف القطر  $وا$  وحينئذ تعين نقطة  $ح$  بواسطة رسم مماس من نقطة  $و$  للمحيط  $و$  الذى مركزه  $و$  ونصف قطره  $وا$  -  $و$  وبالتأمل يعلم أن لهذه المسئلة حلين

الحالة الثانية - أن يكون القماس من الداخل (شكل ٩٣) ليكن حرفا  $و$  و  $و$  رمزين لمحيطي الدائرتين المعلومتين وان المستقيم  $اب$  مماسا داخلا مشتركا بين المحيطين بفرض أن المسئلة محلولة



فتمت نصف القطرين المتوازيين  $وا$  و  $و$  ثم نبعث عن النقطتين  $ا$  و  $ب$  فاذا مدمن نقطة  $و$  المستقيم  $و$  موازيا للمماس  $اب$  يشاهد أن تعين نقطة  $ح$  كلف لتعين كل واحدة من النقطتين  $ا$  و  $ب$  فاذا جعلت نقطة  $و$  مركزا ورسم محيط دائرة

بنصف قطر مساوى الى  $وا$  +  $و$  فيكون مماسا للمستقيم  $و$  وبناء عليه فانها تعين نقطة  $ح$  بواسطة مده مماس من نقطة  $و$  لمحيط الدائرة الذى مركزه  $و$  ونصف قطره مساوى الى مجموع نصفى قطرى الدائرتين المعلومتين

ومن المعلوم أن المسئلة لا تكون ممكنة الا اذا كانت نقطة  $و$  خارجة عن المحيط المساعد أعنى يجب أن يكون  $و = او < و + و$

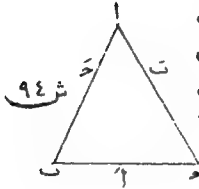
وهذا يدل على ان المحيطين المعلومين اما ان يكونا متباعدين في الخارج أو متماسين كذلك وفي الحالة الاولى يكون للسلة حلان وأما في الثانية فليس لها سوى حل واحد فقط

## في رسم المثلثات

### دعوى علمية

(٩٦) طريقة رسم المثلث اذا علم منه ضلعان والزاوية المحصورة بينهما (شكل ٩٤)

اذا فرض ان المسئلة محلولة وان  $AB$  هو المثلث المطلوب الذي علم منه زاوية  $A$  والضلع  $B = a$  والضلع  $C = b$  فمن حيث ان الضلع  $AC$  معلوم فانه يوضع في أي موضع على مستوى العمل ثم ترسم من نقطة  $A$  احدى نهايتي  $AC$  زاوية  $C$  مساوية للزاوية المعروفة ثم يؤخذ على  $AB$  الطول  $AB = c$  المعطى فاذ وصل  $B$  فقد تم رسم المثلث



### دعوى علمية

(٩٧) طريقة رسم المثلث اذا علم منه ضلع والزاويتان المجاورتان له (شكل ٩٤)

اذا فرض ان المسئلة محلولة وان  $AB$  هو المثلث المطلوب الذي علم منه  $A = \alpha$  و  $B = \beta$  وزاويتان  $C$  و  $B$  فمن حيث ان  $A = \alpha$  فانه يوضع في موضع ما في مستوى العمل ثم يرسم من النقطتين  $C$  و  $B$  زاويتان مساويتان للزاويتين المعطيتين فنقطه  $A$  التي يتقاطع فيها المستقيمان الممدودان يتم بهما رسم المثلث

(تنبيه ١) المسئلان السابقان لا يمكن أن يكون لهما غير حل واحد بناء على نظريات تساوي المثلثات المتقدمة

(تنبيه ٢) اذا لم تعلم الزاويتان المتجاورتان  $C$  و  $B$  للضلع المعطى  $AB$  بل علمت الزاويتان  $A$  و  $C$  مثلاً يلزم قبل كل شيء الحصول على الزاوية  $B$  بواسطة طرح مجموع الزاويتين المعطيتين من قائمتين



(٩٨) طريقة رسم المثلث اذا علمت أضلاعه الثلاثة (شكل ٩٤)

فمن حيث ان الضلع  $A = B$  معلوم فانه يوضع في أى وضع في مستوى العمل ثم يقال ان نقطة  $A$  توجد ضرورة في تقاطع محيطى الدائرتين اللتين مركزاهما  $B$  و  $C$  ونصفا قطرهما هما  $C$  و  $B$  (تنبيه ١) يوجد للمسئلة حلان حيث ان محيطى الدائرتين يتقاطعان في نقطتين غير أن هذين الحلين متطابقان لكونهما متساويين حيث تساوت فيهما الاضلاع الثلاثة كل لنظيره (تنبيه ٢) يجب لامكان حل المسئلة أن يتقاطع محيطى الدائرتين أعني أنه يجب أن يكون الضلع الاكبر من أضلاع المثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وأكبر من فاصلهما

(٩٩) طريقة رسم المثلث اذا علم منه ضلعان والزاوية المقابلة لاحدهما (شكل ٩٥)

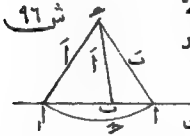
ولاجل تكميل رسم المثلث يكفي تعيين الرأس الثالثة ب غير أن هذه النقطة توجد في آن واحد على الضلع أب وعلى محيط الدائرة الذي مركزه ح ونصف قطره مساو أ

تنبيه - من المفيد مناقشة الاحوال الممكنة لحل هذه المسئلة فنقول

أولاً - من المعلوم أن المسئلة تكون غير ممكنة الحل إذا كان  $\alpha$  أصغر من العمود  $\beta$  النازل من نقطة  $\gamma$  على المستقيم  $ab$

ثانياً - اذا كانت زاوية  $\alpha$  حادة فان الضلع  $\alpha$  يمكن أن يكون مساوياً الى  $\beta$  وفي هذه الحالة يكون للمسئلة حل واحد وهو المثلث القائم الزاوية  $\beta$   $\alpha$  أو يكون أكبر من  $\beta$  وأصغر من  $\alpha$  وفي هذه الحالة يكون للمسئلة حلان مقبولان وهما المثلث  $\beta$   $\alpha$  و  $\beta$   $\alpha$  أو يكون أكبر من  $\beta$   $\alpha$  وفي هذه الحالة لا يكون للمسئلة الا حل واحد وهو المثلث  $\beta$   $\alpha$  لان المثلث  $\beta$   $\alpha$  فيه زاوية منفرجة مكملة لزاوية  $\alpha$  المعلومة

ثالثاً - اذا كانت زاوية  $\alpha$  قائمة وكان  $\alpha$  أكبر من  $\beta$  فانه يتوصل الى حلين متطابقين رابعا - اذا كانت زاوية  $\alpha$  منفرجة فلابد أن تكون المسئلة ممكنة يجب أن يكون الضلع  $\alpha$  أكبر من الضلع  $\beta$  ولا يوجد الا حل واحد (شكل ٩٦) وبالمجمل فانه لا يوجد للمسئلة حلان الا في حالة واحدة فقط وهي التي يكون فيها  $\alpha > 90^\circ$  و  $\alpha > \beta$



## في رسم قطعة دائرة على مستقيم تقبل زاوية معلومة

### دعوى عملية

(١٠٠) طريقة رسم قطعة دائرة على مستقيم معلوم تقبل زاوية معلومة (شكل ٩٧)

ليكن  $\alpha$  احب القطعة المطلوبة بفرض ان المسئلة محلولة

فيجب اذن من تعيين المركز ولذلك يقال

اذا اقيم عمود على وسط  $\alpha$  فانه يمر بضرورة بالمركز و

ثم اذا مدين نقطة  $\beta$  المماس  $\beta$  ط محيط الدائرة

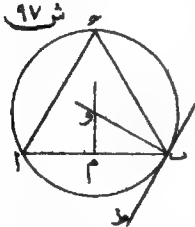
فالزاوية  $\beta$  ط  $\beta$  المكونة من المماس  $\beta$  ط ومن الوتر

$\alpha$  تقاس بنصف القوس  $\alpha$   $\beta$  وتكون اذن مساوية

للزاوية المطلوبة ومن هنا يؤخذ امكان رسم هذا المماس

قبل رسم القطعة وحيث ان المركز  $\beta$  يوجد على العمود القائم من نقطة  $\beta$  على المماس  $\beta$  ط

فيوجد اذن في تقاطع مستقيمين يسهل رسمهما بناء على ما تقرر بنقري ٨٦ و ٨٧



## الفصل السابع

### تمارين

- ١ - المطلوب تعيين نقطتين على محيط دائرة معلوم بحيث يكون بعداهما عن نقطة معلومة خارجة عنه متساويين
- ٢ - المطلوب إيجاد المحل الهندسي لمراكز الدوائر المتحدة في نصف القطر والمماس لمستقيم معلوم
- ٣ - المطلوب امرار مماس لمحيط دائرة معلوم موازيا لمستقيم معلوم
- ٤ - ما هو المحل الهندسي لمراكز محيطات الدوائر المماسة لمستقيمين متقاطعين
- ٥ - المطلوب امرار محيط دائرة بنصف قطر معلوم يكون مماسا لمستقيمين معلومين سواء كانا متوازيين أو متقاطعين وذلك حالة عدم الامكان في حالة توازي المستقيمين المعلومين
- ٦ - المطلوب امرار محيط دائرة يمر بمسقط معلوم في نقطة معينة عليه مع شرط مروره بنقطة معلومة
- ٧ - إذا فرض نقطتان بينهما بعد قدره  $\delta$  والمطلوب أن يمر منهما مستقيمان متوازيان يكون البعد بينهما مساويا  $m$
- ٨ - المطلوب تعيين المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن محيط دائرة معلوم بمقدار معين
- ٩ - المطلوب تعيين المحل الهندسي لمراكز محيطات الدوائر المتساوية البعد عن محيط دائرة معلوم
- ١٠ - المعلوم محيط دائرة ومستقيم والمطلوب امرار محيط دائرة بنصف قطر معين يكون مماسا لهما
- ١١ - المطلوب امرار محيط دائرة بنصف قطر معين يقطع آخر معلوم في نقطتين معينتين وذكر حالة عدم الامكان وعددا للحلول
- ١٢ - المعلوم نقطتان والمطلوب تعيين نقطة تكون متباعدة عن احدهما بمقدار  $m$  وعن الثانية ببعد  $\delta$  مع ذكر ما يتعلق بالاحوال الآتية وهي متى يكون للمسئلة حلان ومتى يكون للمسئلة حل واحد ومتى تكون غير ممكنة
- ١٣ - المطلوب البرهنة على أنه اذا تماس محيطا دائرتين خارجا أو داخلا ومتمن نقطة التماس قاطعان لهما ثم وصل بين نقطتي تقابلهما مع كل محيط بمستقيم فلان هذين المستقيمين يصيران متوازيين واذا لم يتمن نقطة التماس الاقاطع واحد ومتمن نقطتي تقابلهما بالخطين مماسان يكون هذان المماسان متوازيين

- ١٤ - المطلوب البرهنة على أنه إذا فرضت نقطة داخل زاوية وأُترِل منها عمودان على ضلعيها كان الشكل الرباعي الحادث يمكن أن يمر به محيط دائرة
- ١٥ - المطلوب البرهنة على أن شبه المثلث الذي ضلعا المصغر قان متساويان يمكن رسمه داخل محيط دائرة
- ١٦ - المطلوب البرهنة على أنه إذا وصل من رأس المثلث القائم الزاوية الى وسط وتره بمستقيم كان هذا المستقيم الواصل مساويا لنصف الوتر
- ١٧ - إذا فرض مستقيمان متعامدان وفرض مستقيم ذو طول ثابت ينزلق عليهما والمطلوب معرفة محل أو وسط أو تار المثلثات القائمة الزوايا المتكوّنة من ذلك
- ١٨ - إذا أُترِل من رؤس المثلث أعمدة على أضلاعه ثم وصل بين مواقع هذه الأعمدة بمستقيمان فإنه يطلب البرهنة على أن تلك الأعمدة مصنّعة لزوايا المثلث الحادث
- ١٩ - المطلوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين للزاويتين الحادثتين من امتداد الأضلاع المتقابلة من شكل رباعي مرسوم داخل الدائرة متعامدان
- ٢٠ - المطلوب البرهنة على أنه إذا مَدَّ وتران متقاطعان داخل دائرة فإن مجموع القوسين المحصورين بين امتدادهما يكون مساويا لمجموع القوسين المحصورين بين القطرين الموازيين للوترين المذكورين
- ٢١ - المطلوب البرهنة على أن قطر الدائرة المرسومة داخل مثلث قائم الزاوية يساوي الفرق الكائن بين مجموع الضلعين المحيطين بالقائمة وبين الوتر
- ٢٢ - المطلوب رسم المثلث المتساوي الساقين إذا علم منه  
أولا - القاعدة وزاوية الرأس  
ثانيا - زاوية الرأس والارتفاع  
ثالثا - القاعدة ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله
- ٢٣ - المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية إذا علم منه  
أولا - الوتر وزاوية حادة  
ثانيا - الوتر وأحد ضلعي القائمة  
ثالثا - الوتر والارتفاع المناظر له  
رابعا - أحد ضلعي القائمة والارتفاع المقابل للوتر  
خامسا - أحد ضلعي القائمة ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله

- ٢٤ - المطاوب رسم المثلث اذا علم منه نقط أوسط أضلاعه الثلاثة  
٢٥ - المطاوب رسم المربع اذا علم قطره  
٢٦ - المطاوب رسم المستطيل اذا علم أحد أضلاعه والزاوية الحادة بين قطريه  
٢٧ - المطاوب رسم المعين اذا علم قطراه  
٢٨ - المطاوب رسم متوازي الاضلاع اذا علم ضلع منه وقطراه  
٢٩ - المطاوب رسم شبه المخرف المتساوي الساقين اذا علم منه  
أولا - قاعدته وزاوية منه  
ثانيا - قاعدته وارتفاعه  
٣٠ - المطاوب رسم شبه المخرف الكائن كيفما اتفق اذا علمت أضلاعه الاربعة
- 

( تم الجزء الاول من التحفة البهية ويليه الجزء الثاني ان شاء الله تعالى )

---

صفحة	صفحة
٣٤ الفصل الاول تعاريف	٢ الجزء الاول من الصفة الهندسية في الاشكال
٣٦ الفصل الثاني في الاوتار والاقواس	المستقيمة الاضلاع ومحيط الدائرة
٤٠ الفصل الثالث في خواص المماس وعمود المنحنى	٣ الباب الاول في الاشكال المستقيمة الاضلاع
٤٢ الفصل الرابع في أوضاع الدائرة	٣ الفصل الاول في المبادئ
٤٥ الفصل الخامس في مقادير الزوايا	٦ الفصل الثاني في الزوايا
٥٣ الفصل السادس في الدعاوى العملية	٩ الفصل الثالث في المثلثات
٥٤ في رسم الخطوط المتعامدة	١٧ الفصل الرابع في المستقيمات المتعامدة والمائلة
٥٦ في رسم الزوايا	١٩ الفصل الخامس في المحل الهندسي
٥٧ في رسم الخطوط المتوازية	٢٠ الفصل السادس في الاشكال المعقدة
٥٨ في تصنيف زاوية أوقوس معلوم	٢٤ الفصل السابع في المستقيمات المتوازية
٥٩ في رسم المستقيمات المماسية لمحيطات الدوائر	٣٠ الفصل الثامن في الاشكال المتوازية الاضلاع
٦٢ في رسم المثلثات	٣٣ الفصل التاسع تمرينات
٦٤ في رسم قطعة دائرة على مستقيم تقبل زاوية معلومة	٣٤ الباب الثاني في محيط الدائرة وما يتعلق به
٦٥ الفصل السابع تمرينات	













Bibliotheca Alexandrina



0519745